ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР:
К 300-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

LEONHARD EULER:
300th ANNIVERSARY

Нестор-История
Санкт-Петербург
2008

УДК 501:004 Эйлер
ББК 22г Эйлер

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Санкт-Петербургского государственного университета
информационных технологий, механики и оптики
Государственного секретариата по образованию и научным исследованиям Швейцарии
и Посольства Швейцарии в Российской Федерации

Supported by
Saint-Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics
State Secretariat for Education and Research of Switzerland and
Embassy of Switzerland in the Russian Federation

Редакционный совет
проф. В. Н. Васильев, отв. ред. *(Санкт-Петербург, СПбГУ ИТМО)*
проф. Х. Крафт *(Базель, Институт математики Базельского университета, Эйлеровская комиссия)*
проф. И. Ю. Попов *(Санкт-Петербург, СПбГУ ИТМО)*

Составители
доц. Л. И. Брылевская *(Санкт-Петербург, СПбГУ ИТМО)*
М. Маттмюллер *(Базель, Архив Л. Эйлера)*
Ж. Сезиано *(Лозанна, Федеральная политехническая школа)*

Переводы
А. Ю. Емельянов *(Санкт-Петербург, Академический физико-технологический университет РАН)*
М. В. Корышев *(Санкт-Петербург, СПбГУ)*
И. Ю. Тарасова *(Санкт-Петербург, Академический физико-технологический университет РАН)*

Editorial Committee
Editor: prof. Vladimir N. Vasilyev *(Saint-Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics (SPbSU ITMO))*
Dr. Larisa I. Brylevskaya *(St. Petersburg, SPbSU ITMO)*
Prof. Hanspeter Kraft *(Institutes of Mathematic of the Basel University, Euler Commission)*
Martin Mattmüller *(Euler Archive Basel, Euler Commission)*
Prof. Igor Yu. Popov *(St. Petersburg, SPbSU ITMO)*
Jacques Sesiano *(Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne)*

Translations
Alexey Yu. Emelyanov *(Physical-Technological University of the RAS, Saint Petersburg)*
Mikhail V. Koryshev *(Saint-Petersburg State University)*
Irina Yu. Tarasova *(Physical-Technological University of the RAS, Saint Petersburg)*

Леонард Эйлер: К 300-летию со дня рождения. Сб. ст. / Отв. ред. проф. В. Н. Васильев; сост. Л. И. Брылевская, М. Маттмюллер, Ж. Сезиано. — СПб. : Нестор-История, 2008. — 336 с.

ISBN 978-5981-87297-6

9 785981 872976

© Коллектив авторов, 2008
© Редколлегия (составитель), 2008
© Емельянов А. Ю., Корышев М. В.,
Тарасова И. Ю. (перевод), 2008
© Издательство «Нестор-История», 2008

Содержание

Вступительное слово

Дорогие читатели!

В 2007 году научная общественность мира отмечала 300-летие со дня рождения Леонарда Эйлера, выдающегося мыслителя, внесшего значительный вклад в развитие самых разных областей знания. Для России этот год был вдвойне знаменательным, поскольку в мае 2007 г. исполнилось 280 лет со дня приезда ученого в Санкт-Петербург.

Леонард Эйлер прибыл в наш город никому не известным двадцатилетним юношей, и именно здесь в полной мере раскрылись его таланты, и очень скоро он стал авторитетным ученым, чье имя приобрело широкую известность во всем мире. Эйлер был связан с Санкт-Петербургской Академией наук более полувека. За это время он не только прославил Академию своими научными трудами, но и сделал многое для подготовки молодых ученых в России, оказал влияние на формирование интеллектуальной среды страны, участвовал в осуществлении различных государственных проектов. При этом его душевные и духовные дарования не уступали таланту ученого, отсюда — особое отношение к личности Эйлера в современной России.

Ни один ученый не может соперничать с Л. Эйлером по разнообразию тематики исследований, идейному богатству и объему научной продукции, оставленной последующим поколениям. Работы великого ученого выходят в свет без малого уже триста лет, однако издание полного собрания его сочинений, которое осуществляется в Швейцарии с начала XX века, до сих пор еще не завершено. Научные конференции, проводившиеся в юбилейный год в Санкт-Петербурге, показали, что интерес к научному наследию Эйлера не ослабевает и в наши дни. В представленный вашему вниманию сборник «Леонард Эйлер: к 300-летию со дня рождения» вошли статьи ведущих специалистов в области механики, математики, астрономии, метрологии, истории науки и истории образования. Их работы раскрывают нам различные аспекты творчества выдающегося ученого, в них прослежена связь его результатов с современностью, ведь многие результаты Эйлера по-настоящему удается оценить только с позиций современной науки.

Санкт-Петербург и Швейцарию связывают давние традиции научного сотрудничества, в частности, и в деле изучения наследия великого ученого. Представленный проект «Леонард Эйлер: К 300-летию со дня рождения» является очередным шагом на пути возобновления контактов между нашими странами по сохранению и исследованию научного наследия Л. Эйлера.

Вице-президент Союза ректоров России,
председатель Совета ректоров Санкт-Петербурга,
ректор Санкт-Петербургского государственного университета
информационных технологий, механики и оптики
профессор В. Н. Васильев

Вступительное слово

Dear Readers,

In 2007 the world was celebrating the Year of Leonhard Euler, one of the most outstanding scientists of all times. Needless to say that Euler made important discoveries in mathematics, particularly in geometry and calculus, introduced much of the modern mathematical terminology and notation. He is also renowned for his works in mechanics, optics and astronomy, some of them are used even nowadays.

Leonhard Euler's 300th anniversary was widely celebrated by the scientific community in Russia. And this Swiss-Russian publication of selected reports "Leonhard Euler: 300th Anniversary" indeed crowns Euler's year. The book includes the best articles and reports written by authors from Russia and all over the world which were presented at the international conference "Leonhard Euler and Modern Science" organized on the occasion of his anniversary in 2007 in St. Petersburg.

The publication presents new materials on Euler's biography and works, outlines the impact of the scientist's heritage on the development of different fields of knowledge. A special attention is paid to Euler's role in the formation of the Russian mathematic, astronomic and metrological scientific schools; the book also emphasizes the significance of his methodological views in teaching mathematics in Russia.

I believe that this publication will not only commemorate Euler and his achievements, but will also promote science among the general public and especially among the younger generation, which will have to build innovative, technology based economy of Russia.

As the Ambassador of Switzerland to the Russian Federation, I am very happy to see that Leonhard Euler's name is equally dear both to Swiss and Russian people. Because, Swiss by origin, he spent most of his life in St. Petersburg (1727–1741 and 1766–1783) working at the Russian Academy of Sciences. It happened long before the official establishment of diplomatic relations between our countries, which were initiated only in 1906. Thus, we can say that Euler was also one of the first Swiss "ambassadors" to Russia who opened the door for scientific cooperation between our countries and proudly represented Switzerland throughout his life.

Nowadays, Switzerland and Russia are famous for their high standards in education and science, and more and more cooperate in these fields on the foundation laid by Leonhard Euler. To build a common, prosperous future we should remember about our common past. I hope that this book will help you do so and wish you a pleasant reading.

Erwin H. Hofer,
Ambassador of Switzerland to the Russian Federation

От редакции

Представленный сборник посвящен знаменательной дате в истории мировой науки, особенно торжественно отмечавшейся в Санкт-Петербурге, — 300-летию со дня рождения Леонарда Эйлера, академика Санкт-Петербургской Императорской Академии наук. Уже 300 лет имя Эйлера на устах ученого сословия всего мира, уже много написано о его творчестве, однако осмысление такого необычайного по широте охвата научных задач, глубине и количеству основополагающих результатов феномена в истории науки не завершено и по сей день. Юбилейные торжества в Санкт-Петербурге показали, сколь велик интерес к личности ученого, насколько востребованы его научные результаты, насколько актуальны его суждения по проблемам обучения точным наукам и целому ряду вопросов, напрямую к науке не относящихся. Предлагаемый вниманию читателя проект позволяет по-новому осмыслить известное ранее и открыть для себя новые грани творчества выдающегося ученого.

В сборник вошли статьи, подготовленные по материалам конференций, проводившихся в Санкт-Петербурге в 2007 году, и, прежде всего, международной конференции «Леонард Эйлер и современная наука», а также ряд специально написанных для него статей. Издание упорядочено тематически. Сборник открывается биографическими материалами, затем представлены статьи, посвященные трудам Эйлера по математике, механике, астрономии, метрологии, а также педагогическому наследию ученого. Завершают издание работы, в которых обсуждаются проблемы публикации научных трудов и эпистолярного наследия Эйлера, кроме того, читатель может познакомиться с полным перечнем опубликованных и планирующихся к изданию томов «Opera Omnia» Л. Эйлера.

Иллюстрации предоставлены участниками юбилейных торжеств.

Редакционный совет выражает искреннюю благодарность членам международного авторского коллектива, спонсорам и кураторам данного проекта, и особенно посольству Швейцарии в Российской Федерации и Генеральному секретариату по науке и образованию Швейцарии за оказанную поддержку, а также проф. Г. К. Михайлову и Е. Ю. Басаргиной за предоставленные иллюстративные материалы и помощь в издании.

Г. К. Михайлов
Москва, Россия

Леонард Эйлер (к 300-летию со дня рождения)

Abstract: The year 2007 was the Euler year: the world scientific community celebrated the 300th anniversary of the birth of Leonhard Euler, one of the greatest mathematicians of all times. It is largely through Euler's work mathematical analysis (including the theory of differential equations and the calculus of variations) came into being, general mechanics, rigid body mechanics and the hydrodynamics of an ideal fluid became established and the language and style of modern scientific literature was created. The following essay gives a sketch of Leonhard Euler's biography and a short review of his contribution to the modern science.

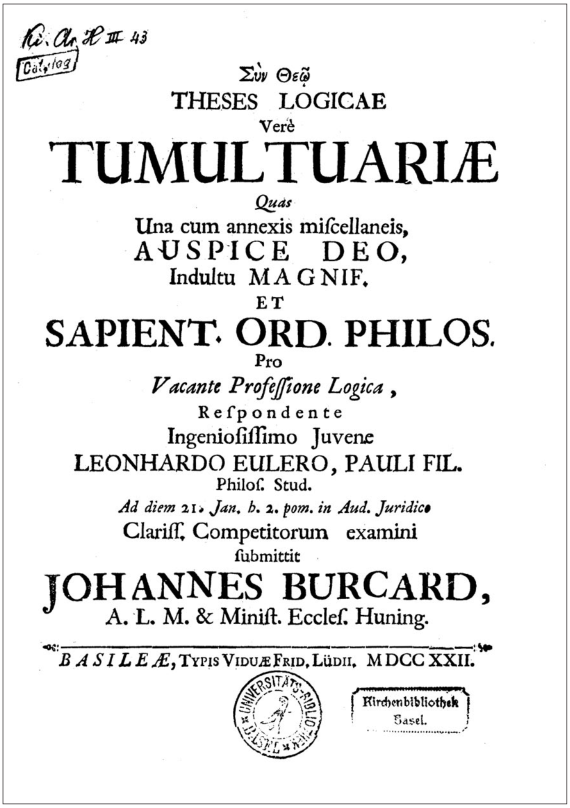
В 2007 году исполнилось триста лет со дня рождения одного из величайших математиков и механиков мира Леонарда Эйлера. С его трудами связано становление математического анализа (включая теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление), рациональной механики, механики твердого тела и гидродинамики идеальной жидкости. Эйлеру же обязан своим становлением язык и стиль научной литературы последующих полутора-двух веков. Ниже приведен очерк жизни Леонарда Эйлера и конспективный обзор его вклада в науку.

1. Предки Леонарда Эйлера были мелкими землевладельцами из расположенного на Боденском озере города Линдау. Этимология самой фамилии Эйлер восходит, по-видимому, к немецкому слову «Au» = заливной луг — типичному элементу топонимики окрестностей Линдау — (ср. Lind*au*) [1]. Прапрадед Леонарда Эйлера в самом конце XVI века переехал в Базель и основал там семью ремесленников. Однако отец Леонарда был уже пастором.

Леонард Эйлер родился в Базеле 15 апреля[1] 1707 г. и провел детство в близлежащем селении, где его отец получил приход. Здесь, в благочестивой обстановке скромного пасторского дома Леонард получил начальное воспитание, наложившее глубокий отпечаток на всю его последующую жизнь и мировоззрение. Осенью 1720 г. Леонард поступил на философский факультет Базельского университета (что по возрасту соответствовало нормам того времени). Сохранились три печатные латинские диссертации 1722 г. по логике и истории римского судопроизводства, официальным «респондентом» по которым выступал Эйлер. На титульных листах этих диссертаций впервые появляется имя Леонарда Эйлера.

В 1723 г. Леонард окончил философские классы и на годичном университетском акте 8 июня 1724 г. произнес по-латыни речь о сравнении картезианской и ньютонианской философии, получив в результате звание магистра. Затем он записался, по желанию отца, на старший — теологический факультет университета.

Начальные сведения по математике Леонард получил еще от отца. В университете на юношу обратил внимание Иоганн Бернулли — один из наиболее значительных математиков того времени. Он стал руководить его самостоятель-



Σὺν Θεῷ
THESES LOGICAE
Verè
TUMULTUARIÆ
Quas
Una cum annexis miſcellaneis,
AUSPICE DEO,
Indultu MAGNIF.
ET
SAPIENT. ORD. PHILOS.
Pro
Vacante Profeſſione Logica,
Reſpondente
Ingenioſiſſimo Juvene
LEONHARDO EULERO, PAULI FIL.
Philoſ. Stud.
Ad diem 21. Jan. h. 2. pom. in Aud. Juridico
Clariſſ. Competitorum examini
ſubmittit
JOHANNES BURCARD,
A. L. M. & Miniſt. Eccleſ. Huning.

BASILEÆ, TYPIS VIDUÆ FRID. LÜDII. MDCC XXII.

Титульный лист диссертации

ными занятиями и, вовсе не склонный преувеличивать чужие заслуги, не случайно написал в 1726 г. о своем девятнадцатилетнем ученике: «Счастливейшего дарования юноша Леонард Эйлер, от проницательности и остроты ума которого мы ожидаем самых больших успехов после ознакомления с той легкостью и изобретательностью, с которой он проник под нашим руководством в сокровенные глубины высшей математики».

Посещая дом учителя, Эйлер познакомился и со старшими сыновьями знаменитого математика — Николаем и Даниилом, приглашенными в Петербург в открывавшуюся там Академию наук. При отъезде Бернулли пообещали Эйлеру, выразившему желание сопровождать их в Россию, исхлопотать и для него место в Петербургской Академии, чего они и добились к осени 1726 г.

Не решившись отправиться в далекий путь зимой, Эйлер отложил свой отъезд на весну, углубившись пока, по совету Даниила Бернулли, в изучение физиологии, профессором которой тот был первоначально в Петербурге. Тем временем в Базеле освободилась кафедра физики. В число двенадцати претендентов на нее, среди которых были Д. Бернулли и известный ученый Я. Герман, вошел и Эйлер. Согласно тогдашним правилам, претенденты на кафедру должны были представить для диспута диссертацию и прочесть пробные лекции. После этого три группы представителей профессуры и администрации университета выбирали из числа соискателей по одному кандидату для последующей жеребьевки.

Эйлер представил на конкурс диссертацию «О звуке» и прочел лекцию «О причине тяготения». В результате тайного голосования «конкурсные подкомиссии» рекомендовали для жеребьевки Германа и двух других кандидатов, не оставивших следов в истории науки. 1 апреля 1727 г. бесстрастный жребий выбрал одного из этих двух случайных кандидатов. На следующий день Эйлер символически записался на медицинский факультет университета и рано утром 5 апреля оставил навсегда свою родину.

Эйлер отправился из Базеля по Рейну до Майнца, затем почтовыми он проехал в Гамбург, а оттуда к Балтийскому морю. (По пути он посетил в Марбурге знаменитого Христиана Вольфа, который отрекомендовал ему Петербург «раем ученых».) Далее Эйлер отплыл в Кронштадт и 24 мая 1727 г. прибыл в Петербург.

2. Созданием Академии наук Россия была обязана царю-преобразователю Петру I, открывшему XVIII век широкими военными действиями и многочисленными, порой противоречивыми, реформами. Начавшаяся в 1700 г. Северная война закончилась лишь спустя 21 год победой России и торжественным поднесением Петру звания Великого, Отца Отечества и Императора Всероссийского. Именно в эти годы Петру было «суждено в Европу прорубить окно». Как писал великий поэт,

Была та смутная пора,
Когда Россия молодая,
В бореньях силы напрягая,
Мужала с гением Петра.

Не получивший сам никакого систематического образования, Петр считал необходимым внедрять на Руси западную культуру и науки и пришел к мысли о создании в своей стране академии. Понятие это было в то время, как и сейчас, двойственным: оно означало как ученое общество, так и высшее учебное заведение. В январе 1724 г. Петр собственноручно внес некоторые поправки в представленный ему проект учреждения Академии, предусмотрев немалые деньги на ее содержание. Проект остался недоработанным, но о решении «учинить Академию, в которой бы учились языкам, также протчим наукам и знатным художествам (т. е. ремеслам — *Г. М.*) и переводили б книги», а, главное, о закреплении за будущей Академией выделенных Петром средств, было объявлено 8 февраля того же года именным указом Сената.

Петру, однако, уже не довелось увидеть свое детище: он скончался 8 февраля 1725 г.

Учреждение Академии было объявлено именным указом Екатерины I от 18 декабря 1725 г., и 7 января 1726 г. (27 декабря 1725 г. ст. ст.) состоялось ее первое торжественное публичное собрание[2].

К моменту приезда Эйлера Академия насчитывала 14 профессоров (академиков), распределенных на три класса: математический, физический и гуманитарный. Средний возраст членов Академии составлял тогда 35 лет[3]. Первоначально Д. Бернулли имел в виду, что Эйлер будет назначен при нем адъюнктом по физиологии, но фактически Эйлер сразу же был приписан к математическому классу.

Академики собирались дважды в неделю на заседания Конференции (так называлось Общее собрание академиков) и в этих заседаниях обсуждали свои научные работы. Кроме того, они обязаны были читать публичные лекции, готовить монографии или учебники и рассматривать направляемые в Академию технические и квалификационные запросы.

Эйлер сразу же активно включился в академическую жизнь. В 30-х годах он выступал в Конференции чаще всех — в среднем 10 раз в год (при общем числе 30–40 докладов). Только в 8 томах академического ежегодника «Комментарии» за 1730–1740 гг. Эйлер опубликовал 58 работ.

В январе 1731 г. Эйлер стал полноправным профессором теоретической и экспериментальной физики, а в 1733 г. получил, наконец, кафедру высшей математики. Сообразно с ростом авторитета Эйлера росло и его материальное благосостояние. Начав в 1727 г. с оклада в 300 рублей в год, он достиг к 1740 г. оклада в 1200 рублей.

Наряду с собственно научной работой, Эйлер читал лекции — сначала по физике, а позже по математике. С 1735 г. он вел большую работу в Географическом департаменте Академии по подготовке генеральной карты России. Вспоминая впоследствии об этой работе, Эйлер писал: «Я уверен, что география российская чрез мои и г. профессора Гейнзиуса труды приведена гораздо в исправнейшее состояние, нежели география немецкой земли»[4]. Наряду с этим, Эйлер вел в течение многих лет и самостоятельные наблюдения в астрономической обсерватории. Помимо этого, он привлекался к выполнению разнообразных поручений, которые Академия получала от правительственных учреждений. Так, Эйлер принимал участие в обсуждении проекта подъема большого кремлевского колокола в Москве, в экспертизах весов различных конструкций и пр. Он участвовал в разработке программы экзаменов для кадетского корпуса, сам принимал экзамены у кадет, а также и у различных технических специалистов для определения их квалификации[5].

Неутомимая работоспособность Эйлера не знала никаких преград, и даже когда осенью 1738 г. он лишился, в результате тяжелого воспаления, правого глаза, то и это никак ее не ослабило.

В Петербурге сложился и окреп талант Эйлера. Здесь он сформировался как ученый мирового масштаба. «Такому вожделенному случаю, — писал Эйлер в 1749 г., — не только доктор Гмелин обязан всем, что сделало известным его имя, но и я, и все прочие, имевшие счастье состоять некоторое время при русской императорской Академии. Мы должны сознаться, сколько обязаны благоприятным обстоятельствам, в которых только там находились. Что собственно до меня касается, то в случае неимения такого превосходного случая, я бы вынужден был главнейше прилежать к другим наукам, от которых, по всем признакам, я бы отупел только. Его королевское величество недавно меня спрашивал: где я изучал то, что знаю? Я, согласно истине, отвечал, что всем обязан моему пребыванию в петербургской Академии наук»[6].

Обстановка в Петербургской академии в 30-х годах не была простой. Отсутствие официального регламента оставляло ее, зачастую, в безраздельном распоряжении советника канцелярии И. Д. Шумахера, привлеченного Петром I к созданию в Петербурге библиотеки и кунсткамеры еще задолго до создания Академии. Человек властный, искусный в интригах, Шумахер, зачастую, противопоставлял себя академикам, вмешивался в не касавшиеся его дела и вызывал открытые протесты академиков. Однако, вместе с тем, он умело вел академический корабль по сложным петербургским волнам. Так или иначе, но обычно ладившего с начальством Эйлера удовлетворяли условия его работы в Петербурге. Но в октябре 1740 года скончалась императрица Анна Иоанновна, а «при последовавшем регентстве дела начали принимать, — по выражению Эйлера, — сомнительный оборот»[7]. Вскоре фаворит императрицы, регент и покровитель Академии Э. И. Бирон был арестован и осужден на четвертование, замененное пожизненным заключением. В стране возникла реакция, грозившая резко сказаться на положении Академии наук, пользовавшейся расположением смещенной власти. Учитывая создавшуюся обстановку, Эйлер принял полученное им ранее приглашение прусского короля в реорганизуемую Берлинскую академию. Весной 1741 г. он обратился с ходатайством о расторжении незадолго до того обновленного контракта. Получив разрешение на льготных условиях, с назначением пенсии и званием почетного члена Академии, Эйлер 19 июня 1741 г. покинул Петербург и 25 июля 1741 г. прибыл в Берлин.

3. Предшественником Академии наук в Берлине было созданное там по инициативе Лейбница в 1700 г. Научное общество, влачившее жалкое существование. В 1740 г. на трон вступил Фридрих II, нареченный впоследствии в Пруссии Великим. Претендовавший на просвещенный абсолютизм Фридрих задумал создать в Берлине блестящую Академию наук, распорядившись о приглашении в нее крупнейших ученых и, в частности, Леонарда Эйлера — «великого алгебраиста». Оформление новой Академии ожидало окончания Силезских войн. Украсив Академию Эйлером, король не собирался привлекать его к ее руководству, подбирая для этого кандидата в кругах французских просветителей. Наконец, в 1745 г. подходящий президент был найден. Им оказался француз Мопертюи, незадолго до того прославившийся градусными измерениями дуги меридиана в Лапландии.

Новая Берлинская академия, названная Академией наук и словесности (Académie des sciences et belles-lettres), фактически начала работать в конце 1745 г. Непосредственную связь Академии с королем осуществлял Мопертюи. Академия была разделена на четыре класса: физический («экспериментальной философии»), математический, философский («спекулятивной философии») и филологический. 3 февраля 1746 г. Эйлер был назначен директором математического класса. Как и в Петербурге, Эйлер выступал в Академии около 10 раз в год с научными докладами и одновременно привлекался к различным техническим экспертизам. Так, Эйлер занимался вопросами гидравлических машин, артиллерии, картографии, участвовал в разработке улучшения судоходных каналов и водоснабжения королевского дворца, в рассмотрении технических аспектов солеварения, проектов лотерей и пр. Большую работу вел Эйлер по контролю над изданием календарей, приносивших определенный доход Академии. Он занимался и различными другими научно-административными делами, связанными с академической обсерваторией, ботаническим садом и т. п.[8]

Тем не менее, находясь в деловом контакте с Фридрихом II, Эйлер постоянно оставался инородным телом в ближайшем окружении «короля-философа», не ценившего отвлеченных математических изысканий и не раз насмехавшегося в своих стихах над лишенным салонного блеска великим математиком.

После смерти Мопертюи (1759) Эйлер остался в Берлинской академии едва ли не ее фактическим руководителем. Однако Фридрих II так и не пожелал назначить Эйлера президентом. В результате Академия осталась (на 175 лет!) вовсе без президента, а общее руководство ею взял на себя пока лично Фридрих II.

В создавшейся обстановке Эйлер решил вернуться в Петербург. К тому же, в 1764–1765 гг. у него возникли разногласия с руководством Академии по поводу ведения ее финансовых дел. Наконец, 2 февраля 1766 г. Эйлер обратился к королю с просьбой отпустить его, на что получил согласие лишь через три месяца.

Заблаговременно ликвидировав свое разросшееся недвижимое имущество, Эйлер покинул Берлин вместе со своей большой семьей 9 июня 1766 г. и 28 июля прибыл в Петербург. Путешествие его было триумфальным — по пути Эйлер был гостем польского короля в Варшаве и герцога Курляндского в Митаве (теперь Елгава), а в Риге ему была выделена почетная охрана.

Прежде чем говорить о втором петербургском периоде жизни Эйлера необходимо подчеркнуть, что в течение 25 лет его наиболее активной творческой жизни, проведенных в Берлине, он постоянно поддерживал теснейшие деловые связи и с Петербургской Академией наук. Число научных статей (не считая отдельных книг), опубликованных за эти четверть века в Берлине и Петербурге, составляет, соответственно, около 130 и 100. В Берлине у Эйлера одно время стажировались и жили прикомандированные к нему из Петербурга русские ученики. Как и раньше, он привлекался к различного рода экспертизам и к разрешению всяких сложных ученых и внутриакадемических вопросов. На Эйлере лежала, в значительной степени, обязанность подбора кадров для Петербурга. Можно смело сказать, что в течение четверти века Эйлер являлся своего рода центральноевропейским филиалом Петербургской Академии наук. «Я до сих пор работал для императорской Академии, — писал он сам в 1760 г. в Россию, — не как отсутствующий член, но наверное так же много, как бы я состоял там налицо»[9].

4. Леонард Эйлер был принят в Петербурге в 1766 г. с большим почетом. Екатерина II назначила Эйлеру оклад размером в 3000 рублей в год, выдала 3000 рублей на переезд и 8000 рублей на покупку дома. Старший его сын Иоганн-Альбрехт, ставший уже в возрасте 20 лет членом Берлинской академии, был принят в Петербургскую Академию наук профессором физики с окладом 1000 рублей в год, а с 1769 г. стал конференц-секретарем Академии. В первые же дни по приезде ученого в Петербург императрица благосклонно выслушала соображения Эйлера о путях усовершенствования работы Академии. 10 ноября 1766 г., вместо ранее управлявшей академическими делами Канцелярии, была учреждена Комиссия под дирекцией графа В. Г. Орлова «для разобрания и приведения в лучшее состояние всех академических департаментов». В состав Комиссии вошли шесть академиков, в том числе отец и сын Эйлеры. В марте 1767 г. Эйлеру, совместно с его учеником С. Я. Румовским, было поручено общее руководство Географическим департаментом Академии, которому правительство придавало большое значение. Казалось бы, что, наконец, Эйлер получил реальную возможность влиять на общеакадемическую политику. Однако Екатерина II вскоре утратила интерес к прогрессивным реформам, и Академия наук стала лишаться своих призрачных академических свобод. Взаимоотношения Эйлера с Орловым также стали осложняться. Дело кончилось прошением Эйлера об увольнении его из состава Комиссии и освобождении от руководства Географическим департаментом.

Все эти события развертывались на фоне постепенной утраты Эйлером зрения. Еще осенью 1766 г. у него произошла резкая потеря зрения на левый глаз. Осенью 1771 г. Эйлеру удалили катаракту с левого глаза, но это не привело к успеху. В результате практически все 17 лет своего второго пребывания в Петербурге Эйлер был полуслепым и мог писать лишь мелом на большой грифельной доске. Ему читали нужные сочинения, он производил в уме выкладки, диктовал и кое-что набрасывал на своей грифельной доске, оставляя оформление работ помощникам[10]. Но такова была сила его гения, что, избавившись от необходимости самостоятельно переписывать получаемые им результаты, Эйлер выполнил за эти годы невероятное количество исследований, хотя и не содержавших, как правило, таких фундаментальных результатов, которые характеризовали его предшествовавшие труды. Наряду с этим, Эйлера по-прежнему продолжали еще привлекать в 70-х годах к различным экспертизам. Так, например, в 1776 г. он входил в комиссию по рассмотрению проекта моста через р. Неву, составленного И. П. Кулибиным.

В последний год жизни Эйлера обстоятельства ему вновь улыбнулись. Директором Академии была назначена княгиня Е. Р. Дашкова, проявившая положительный интерес к делам Академии и личное уважение к Эйлеру. Однако для последнего это было уже прощанием с Академией. 18 сентября 1783 г. 76-летний Эйлер, как всегда, занимался математическими исследованиями, беседовал за обедом о незадолго до того открытой седьмой планете, а вечером за чаем шутил с внуком. Неожиданно со словами «я умираю» он потерял сознание и через несколько часов, по меткому выражению панегириста, «прекратил вычислять и жить».

5. Научное наследие Леонарда Эйлера поистине необозримо. Среди его трудов находятся работы по всем разделам чистой и прикладной математики того времени, по механике, астрономии, физике, теории музыки, философии.

Наиболее значительны, конечно, заслуги Эйлера в развитии математического анализа (включая теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление) и рациональной механики.

В ту эпоху, когда Эйлер вступил на ученое поприще, в математике уже были заложены основы замечательного аппарата дифференциального и интегрального исчисления. Перед математикой и механикой стояла задача всесторонней разработки этого аппарата и применения его для исследования разнообразных задач. Однако ни в самой математике, ни, тем более, в механике не существовало еще никакой общей системы. Требовалось использовать богатейшие возможности математического анализа и поднять теоретические и прикладные разделы высшей математики от состояния совокупности отдельных искусных приемов и решенных задач до уровня систематически построенной совершенной науки. Решению этой задачи и было посвящено, главным образом, творчество Эйлера.

Известным завершением этой программы применительно к математическому анализу явился классический курс Эйлера, состоящий из трех частей, — «аналитическая трилогия», как его назвал крупнейший знаток математического наследия Эйлера А. П. Юшкевич. В эту шеститомную «трилогию» объемом около 3000 страниц входят два тома «Введения в анализ бесконечно малых» (1748), «Наставление по дифференциальному исчислению, с его применением к анализу конечных и к учению о рядах» (1755) и три тома «Наставления по интегральному исчислению» (1768–1770), содержащего методы интегрирования дифференциальных уравнений. Этот блестящий курс, переведенный в наше время и на русский язык, не имеет аналогов среди сочинений XVIII в. Множество изложенных здесь Эйлером результатов принадлежит ему самому, и почти все они вошли в золотой фонд достижений математического анализа.

Наряду с «аналитической трилогией» Эйлера следует упомянуть и его «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума» (1744) — первый трактат по вариационному исчислению.

Помимо знаменитых руководств по математическому анализу, Эйлеру принадлежат также два тома «Введения в арифметику» (1738–1740) для академической гимназии и выдержавшее около 30 изданий на шести европейских языках двухтомное «Полное руководство по алгебре» (1768–1769), включающее теорию алгебраических уравнений и диофантов анализ.

Среди конкретных результатов, принадлежащих Эйлеру в математическом анализе, отметим методы решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Он исследовал также некоторые решения довольно общего линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, частными случаями которого являются уравнения Бесселя, Лежандра и гипергеометрическое уравнение. Эйлер развил методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, возродившиеся в наше время в связи с интенсивным развитием вычислительной математики. Он заложил общие подходы в вариационном исчислении и указал дифференциальное уравнение (названное позже его именем), определяющее условия экстремума функционала. Эйлер начал исследование ряда важных специальных функций (например, B- и Γ-функций, функций Бесселя первого рода, ζ-функции действительного аргумента). Он внес фундаментальный вклад и в развитие теории аналитических функций и теории чисел. Наконец, даже многие общепринятые в наши дни математические обозначения (такие как π, e, i, обратные тригонометрические функции и др.) закрепились в математике благодаря Эйлеру.

Не все полученные Эйлером результаты были обоснованы им надлежащим образом, да и не все они могли быть обоснованы средствами XVIII в. Но надо отметить, что даже отдельные подвергавшиеся в течение многих десятилетий резкой критике места его работ — такие, как, например, использование расходящихся рядов — представляются современному исследователю весьма глубокими. Содержательность некоторых других нечетко сформулированных представлений Эйлера стала очевидна также только в наше время. Так, например, обстоит дело с общими представлениями Эйлера о понятии функции, от которых, как подчеркивал А. П. Юшкевич, «нити протягиваются к новейшим методам XX в., к обобщенным функциям С. Л. Соболева и Л. Шварца» [2]. «Здесь, — добавляет Юшкевич, — как и в суммировании расходящихся рядов, Эйлер проявил гораздо большую прозорливость и смелость мысли, чем многие его современники».

Выдающийся вклад был внесен Эйлером в формирование рациональной механики[11]. В 1736 г. Эйлер опубликовал двухтомную «Механику», в которой дал аналитическое изложение динамики точки, открыв тем самым широкий путь для дальнейших исследований. В 1752 г. была опубликована его историческая работа «Открытие нового принципа механики», в которой Эйлер приложил ньютоновы законы динамики, записанные в неподвижных декартовых координатах, к элементу сплошной среды, что дало ему возможность построить основы динамики твердого тела и гидродинамику идеальной жидкости — первый из разделов разросшейся в XIX веке механики сплошной среды. Впоследствии (1776) Эйлер впервые выписал шесть уравнений движения произвольного тела, присоединив к законам количества движения законы момента количеств движения.

В значительной степени с трудами Эйлера связано развитие в середине XVIII века небесной механики, включая теорию возмущений планетных движений и теорию движения Луны.

В области прикладной механики Эйлеру принадлежат фундаментальные исследования по теории корабля, устойчивости упругих стержней, теории трения и др.

Не оставил стороной Эйлер и проблемы физики XVIII века[12].

Имя Эйлера навечно вошло в историю математики и механики. Достаточно сказать, что «Математическая энциклопедия» (1985) содержит 20 статей, непосредственно объясняющих различные понятия, связанные с именем Эйлера (критерии, методы, многочлены, подстановки, постоянные, теоремы, уравнения, формулы, функции и т. п.).

Задел, оставленный Эйлером в математике и механике, оказался настолько велик, что стимулировал математическую мысль на протяжении нескольких поколений. Влиянию сочинений Эйлера на последующие поколения в значительной мере способствовала и введенная им манера изложения материала.

В «Трактате по небесной механике» Лаплас писал, что Эйлер «благодаря своим открытиям во всех областях анализа и совершенству, внесенному им в язык, может считаться отцом современного анализа». М. В. Остроградский заметил по поводу этих слов Лапласа: «Это звание отца вполне заслужено, так как именно Эйлер создал современный анализ и сформировал нынешний язык математики. Пусть обратятся к трудам предшествующих и современных ему математиков, пусть почитают Паскаля, Лейбница, всех Бернулли, Клеро, Даламбера и других. Это чтение покажется утомительным, как чтение трудов, язык которых устарел, а последовательность и способ выражения мыслей нам чужды. При этом окажется нужным уделять больше внимания форме, в которой преподносятся идеи, чем самим идеям. И если теперь больше не пишут так, как писали эти столь заслуженно знаменитые люди, если мы отошли от их манеры трактовки вопросов, то это потому, что Эйлер увлек за собой последующие поколения и научил их думать и писать так, как думал и писал он сам. Чтение его работ является самым легким и самым полезным делом. Он присоединил славу великого преобразователя к заслугам весьма понятного и весьма изящного автора» [3].

Подлинные труды Эйлера интенсивно изучали на протяжении всего XIX века, и они продолжали оказывать прямое влияние на воспитание математиков и развитие математики даже в начале XX века. Академик В. И. Смирнов вспоминал, например, что в годы его учебы в Петербургском университете некоторые экзаменаторы еще спрашивали о том, в каком именно сочинении Эйлера находятся те или иные его результаты.

Эйлер остается, пожалуй, единственным ученым середины XVIII в., работы которого легко читаются и в наши дни.

6. Общий объем сочинений Эйлера громаден. Свыше 800 его опубликованных научных работ составляют около 30 000 печатных страниц и складываются, в основном, из следующего: 600 статей в периодических изданиях и сборниках Петербургской Академии наук[13], 130 статей в «Мемуарах» Берлинской академии и изданных в Берлине сборниках, 30 статей в разных журналах Европы,

15 мемуаров, удостоенных премий и поощрений Парижской Академии наук, и 40 книг отдельных сочинений[14].

«Полное собрание трудов» Эйлера («Opera omnia») издается под эгидой Швейцарского Общества естествоиспытателей (Schweizerische Naturforschende Gesellschaft) вот уже в течение века. Первоначально оно планировалось в трех сериях. На сегодня завершена публикация первой серии (математика), составившей 29 томов объемом 14 000 страниц in quarto, и третьей серии (физика и разное), составившей 12 томов объемом 5000 страниц. Из 31 тома второй серии (механика и астрономия) объемом 11 000 страниц вышло в свет 29 томов, а недостающие два тома находятся в процессе подготовки к печати. Таким образом, эта часть издания, первый том которого был опубликован еще в 1911 г., близка к завершению.

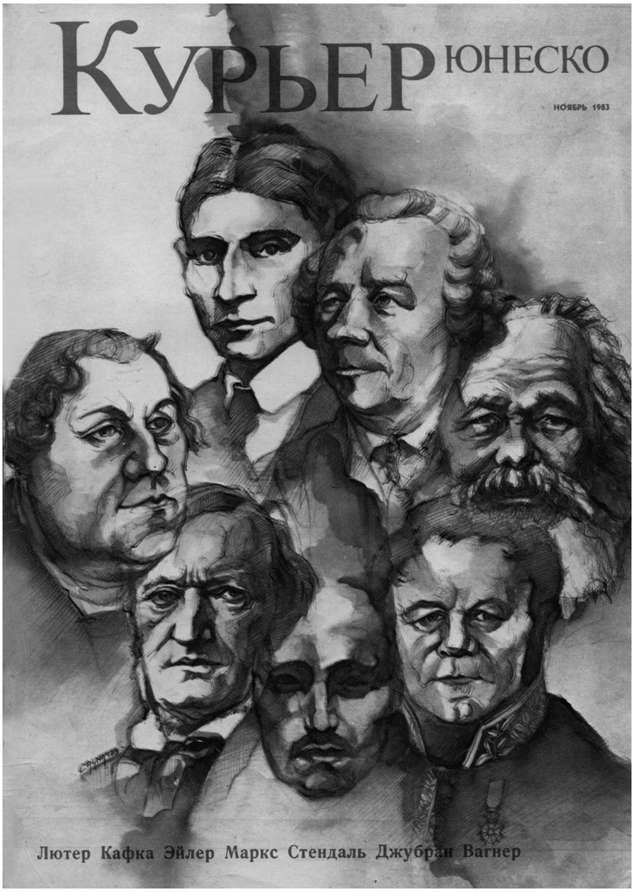
В 1970-х годах Швейцарское Общество естествоиспытателей (преобразованное позже в Швейцарскую Академию естественных наук) приступило совместно с Академией наук СССР, являющейся обладательницей основной части рукописного архива Эйлера, к изданию четвертой серии его «Полного собрания трудов», которая, как первоначально предполагалось, должна была состоять из двух частей: научная переписка (IV-A) и неопубликованные рукописи (IV-B). На сегодня запланировано ориентировочно 8–10 томов научной переписки, а обсуждение судьбы серии IV-B приостановлено, в связи с прекращением финансирования издания швейцарскими властями (вместо этого обсуждается вопрос о сканировании всех рукописей Эйлера и вынесении их в Интернет, вне рамок «Opera omnia»). Первый том серии IV-A вышел в свет в 1976 г. и содержит аннотированный перечень всей сохранившейся переписки Эйлера, составляющей свыше 1000 писем Эйлера и почти 2000 писем его корреспондентов, среди которых находятся практически все крупнейшие ученые того времени. (Вся сохранившаяся переписка носит научный и деловой характер, личная переписка Эйлера, к сожалению, не сохранилась.) Кроме того, вышло еще три тома этой серии: переписка Эйлера с французскими математиками Клеро, Даламбером и Лагранжем (1980), с Фридрихом II и Мопертюи (1986) и с Иоганном Бернулли (1998). Сейчас ведется интенсивная работа по завершению подготовки к изданию всей серии IV-A.

Анализ научной переписки Эйлера дает много важных и интересных деталей для характеристики эпохи и для понимания развития математики и механики в середине XVIII века. Сам Эйлер писал в 1765 г. по поводу своей ученой корреспонденции, что «если бы кто-нибудь захотел взять на себя труд ее прочитать, в ней нашли бы много важных мест, публикация которых больше соответствовала бы вкусам публики, чем глубочайшие разработки» [4, т. 1, с. 259].

7. Значение Эйлера для Петербургской Академии наук и становления всего математического естествознания огромно. Петербургская Академия наук оказала своему скончавшемуся старейшине достойные почести, в 1786 г. его бюст был установлен на мраморной колонне в зале заседаний Академии против кресла президента. Однако, как это иногда бывает, вскоре даже могила Эйлера была утеряна. Лишь через полвека ее случайно обнаружили вновь, и в 1837 г. на нее был возложен величественный гранитный камень со скромной латинской надписью «Леонарду Эйлеру Петербургская академия». По случаю 250-летия со дня рождения Эйлера его захоронение было перенесено в некрополь Александро-Невской лавры (фотография памятника в день открытия юбилейных торжеств в 2007 г. см. на цветной вклейке — *Прим. ред.*).

К 150-летию со времени своего основания (1879) Петербургская Академия наук озаботилась приобретением хорошего портрета Леонарда Эйлера. Для этой цели была заказана копия находящегося в Швейцарии портрета работы Гандмана. По случаю 50-летия Пулковской обсерватории Академия передала этот превосходный портрет обсерватории, где он и находился до Великой Отечественной войны. Во время войны портрет пропал, а в 1972 г. будущий академик и директор Института физики атмосферы РАН князь Г. С. Голицын приобрел в одном из комиссионных магазинов Ленинграда за бесценок некий портрет «неизвестного», в котором он сразу узнал Эйлера. Отреставрировав портрет, Г. С. Голицын поместил его в своем кабинете. Автор случайно узнал об этом портрете и сразу же идентифицировал его с пропавшим академическим портретом. Фотография этого портрета воспроизведена на фронтисписе настоящего сборника.

Жизни и творчеству Эйлера посвящена колоссальная литература. Годовщины дня его рождения и дня кончины систематически отмечались, с постоянно нарастающим размахом, начиная с 1884 года. Годовщина смерти великого ученого была отмечена в 1983 г. также и ЮНЕСКО. Материалы многих из этих юбилейных мероприятий публиковались в виде отдельных сборников ([5]–[13]).



Обложка журнала «Курьер ЮНЕСКО»

Из последних работ, посвященных общему обзору жизни и деятельности Эйлера, стоит отметить немецкую монографию Э. Фелльмана (1995), переведенную теперь и на английский язык [14]. К юбилейным торжествам 2007 г. был приурочен также выпуск посвященного Эйлеру комикса [15].

Анализ научных трудов Эйлера можно найти, помимо общих сочинений и отдельных статей, во вводных очерках к отдельным томам «Opera omnia». В 2007 году Математическая ассоциация Америки выпустила еще шесть томов, посвященных трудам Эйлера ([16]–[21]), один из которых является переводом русского сборника [12].

В Интернете имеется сайт (www.math.dartmouth.edu/~euler), на который вынесены сочинения Эйлера и сопутствующие им материалы. Швейцарский сайт (www.euler.ch) посвящен больше биографии и генеалогии потомков Эйлера.

8. Добавим еще несколько слов о семье Эйлера. 7 января 1734 г. (27 декабря 1733 г. ст. ст.) он женился на дочери академического живописца Катарине Гзелль. От этого брака у него родилось много детей, но выросли из них только пятеро — три сына и две дочери. После смерти Катарины Эйлер женился вторично, чтобы обеспечить себе независимость от детей. Это обстоятельство, лишавшее детей ожидаемого ими наследства, вызвало у них, конечно, взрыв возмущения, о чем мы узнали из сохранившихся писем И.-А. Эйлера [14, с. 124–129].

Сыновья Эйлера остались в России. Старший, Иоганн-Альбрехт, был, как сказано, конференц-секретарем Академии, второй сын, Карл, стал лейб-медиком, а младший, Христофор, дослужился до чина генерал-лейтенанта артиллерии.

Внук Леонарда Эйлера генерал А. Х. Эйлер был в 1846 г. возведен в потомственное российское дворянство с присвоением герба. Прямые потомки Леонарда Эйлера дали России на протяжении полутора веков ряд крупных военных и государственных деятелей.

Одна из дочерей И.-А. Эйлера вышла замуж за будущего академика Николая Фусса — ближайшего ученика и помощника Эйлера, сменившего своего тестя на посту непременного секретаря Петербургской академии. После него этот пост занял его сын — правнук Эйлера академик Павел Николаевич Фусс. В результате, научное делопроизводство и практическое руководство в Академии наук находились в течение 86 лет в руках наследников Эйлера.

Фамилия Эйлеров не перевелась и доныне: прямые потомки Леонарда Эйлера, с гордостью носящие эту фамилию, живут в Петербурге, Москве и Швейцарии (куда они попали после переворота 1917 года)[15].

К сожалению, личный архив Леонарда Эйлера, принадлежавшие ему вещи, семейные бумаги, включая обширную переписку с отцом, не сохранились. Возможно, многое из этого было утрачено еще в начале XIX века, а меньшая часть в начале XX века.

Примечания:

[1] Здесь и далее все даты приведены по новому, григорианскому стилю.

[2] О создании и первом периоде деятельности Петербургской Академии наук см. [22].

[3] Постепенно средний возраст членов Академии рос, удвоившись за 250 лет.

[4] См. [4, т. 2, с. 86]. Русский перевод цитирован по П. П. Пекарскому [23, с. 255].

[5] Источниками для изучения деятельности Эйлера в Петербургской Академии наук служат, помимо новейших исследований, три тома «Протоколов» Академической кон-

ференции за 1726–1803 гг. [24] и 10 томов «Материалов» для истории Академии наук в 1716–1750 гг. [25]. См. также описание материалов Эйлера в Архиве Академии наук [26].

[6] См. [4, т. 2, с. 182]. Русский перевод цитирован по П. П. Пекарскому [23, с. 265].

[7] Приведены слова Эйлера из его автобиографии (см. [27]). Русский перевод автобиографии Эйлера и некоторых других его биографических материалов XVIII в. см. в [28].

[8] Сохранились и опубликованы краткие извлечения из протоколов Берлинской Академии наук за 1746–1766 гг. [29]. Опубликовано также описание хранящихся в Берлинской академии документов Эйлера [30].

[9] [4, т. 1, с. 162]. Русский перевод цитирован по П. П. Пекарскому [23, с. 279].

[10] Среди помощников Эйлера тех лет отметим его старшего сына Иоганна-Альбрехта и особенно уроженца Базеля Николая Фусса, специально приехавшего для этой цели по рекомендации Д. Бернулли в Петербург и вошедшего впоследствии в семью Эйлера.

[11] Более подробному освещению вклада Эйлера в становление рациональной механики посвящена другая статья автора в этом сборнике (см. с. 137–151).

[12] Особое место в наследии Эйлера представляют три тома его «Писем к немецкой принцессе о разных физических и философских материях», написанных в 1760–1762 гг. для наставления одной из дальних кузин Фридриха II и первоначально не предназначенных для печати. Выпущенные в трех томах (1768–1772), «Письма» эти выдержали в конце XVIII и начале XIX вв. около 40 изданий на 10 европейских языках, а недавно были переизданы в новом русском переводе в академической серии «Классики науки» (2002). Эти «Письма» представляют собой энциклопедию естествознания середины XVIII века, но собственно философская часть их подверглась сразу же после их публикации жесткой критике в прогрессивных ученых кругах. Так, Даламбер писал Лагранжу по поводу «Писем» Эйлера: «Вы были правы, говоря, что он не должен был печатать это сочинение ради своей же чести. Невероятно, чтобы такой великий гений в геометрии и анализе, как он, был в метафизике настолько ниже самого младшего школьника, — чтобы не сказать — таким плоским и нелепым. Это дает право повторить: Non omnia eidem Dii dedere (Не всё Боги дают одному и тому же — *Г. М.*)» [31]. Одновременно, впрочем, надо помнить, что некоторые аспекты философско-физических представлений Эйлера безусловно оказали влияние на формирование последующей немецкой философии и, в частности, философии Канта.

[13] За первые 50 лет издательской деятельности Петербургской Академии наук Эйлеру принадлежит 60% всех ее публикаций по чистой и прикладной математике, а за 100 лет — 40%. Любопытно, что статьи Эйлера печатались непрерывно в каждом томе основного академического журнала, неоднократно менявшего свое название, на протяжении ста лет (с 1729 г. до 1830 г.).

[14] Большинство петербургских статей Эйлера написаны по-латыни, а берлинских — по-французски. Наиболее полная для своего времени библиография трудов Л. Эйлера была составлена Г. Энестрёмом [32]. Его указатель воспроизведен, с сокращенными описаниями, в посвященном материалам Эйлера сборнике [26].

[15] Родословная роспись потомков Леонарда Эйлера была опубликована в юбилейном сборнике [12].

Литература:

1. *Euler K.* Das Geschlecht Euler-Schölpi. Giessen: Schmitz, 1955.

2. *Юшкевич А. П.* Леонард Эйлер. М.: Знание, 1982.

3. *Остроградский М. В.* Педагогическое наследие, документы о жизни и деятельности. М.: Физматгиз, 1961. С. 307–308.

4. Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel L. Eulers. 3 t. Berlin: Akademie-Verlag, 1959–1976.

5. Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages L. Eulers. Leipzig–Berlin: Teubner, 1907.

6. Леонард Эйлер: Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. М.; Л.: АН СССР, 1935.

7. Леонард Эйлер: Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР. М.: АН СССР, 1958.

8. Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages L. Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. Berlin: Akademie-Verlag, 1959.

9. Leonhard Euler 1707–1783: Beiträge zu Leben und Werk. Basel: Birkhäuser, 1983.

10. Zum Werk Leonhard Eulers: Vorträge des Euler-Kolloquiums. Basel: Birkhäuser, 1984.

11. Festakt und wissenschaftliche Konferenz aus Anlass des 200. Todestages von L. Euler. Berlin: Akademie-Verlag, 1985.

12. Развитие идей Л. Эйлера и современная наука: Сборник статей. М.: Наука, 1988.

13. Леонард Эйлер и современная наука: Материалы Международной научной конференции. СПб., 2007.

14. *Fellmann E.* Leonhard Euler. Basel e. a.: Birkhäuser, 2007.

15. *Heyne A. K., Pini E. S.* Leonhard Euler: Ein Mann, mit dem man rechnen kann. Basel e. a.: Birkhäuser, 2007 [имеется параллельно изданный перевод на английский язык].

16. *Sandifer C. E.* The Early Mathematics of L. Euler. Washington (D. C.): Math. Assoc. Amer., 2007.

17. The Genius of Euler: Reflections on His Life and Work. Washington (D. C.): Math. Assoc. Amer., 2007.

18. *Sandifer C. E.* How Euler Did It. Washington (D. C.): Math. Assoc. Amer., 2007.

19. Euler and Modern Science / Transl. from Russian. Washington (D. C.): Math. Assoc. Amer., 2007.

20. Euler at 300: An Appreciation. Washington (D. C.): Math. Assoc. Amer., 2007.

21. Leonhard Euler: Life, Work and Legacy. Amsterdam e. a.: Elsevier, 2007.

22. *Копелевич Ю. Х.* Основание Петербургской Академии наук. Л.: Наука, 1977.

23. *Пекарский П. П.* История Императорской Академии наук в Петербурге. Т. 1. СПб.: Имп. Академия наук, 1870.

24. Протоколы заседаний конференции Императорской Академии наук. 4 т. СПб.: Имп. Академия наук, 1897–1911.

25. Материалы для истории Императорской Академии наук. 10 т. СПб.: Имп. Академия наук, 1885–1900.

26. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. Т. 1. М.; Л.: АН СССР, 1962. (Труды Архива АН СССР; Вып. 17.)

27. *Пекарский П. П.* Екатерина II и Эйлер // Зап. Акад. наук. Т. 6. Ч. I. 1864. С. 59–92.

28. *Копелевич Ю. Х.* Материалы для биографии Л. Эйлера // ИМИ. Вып. 10 (1957). С. 9–65.

29. Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746–1766. Berlin: Akademie-Verlag, 1957.

30. L. Eulers Wirken an der Berliner Akademie der Wissenschaften 1741–1766. Berlin: Akademie-Verlag, 1984.

31. *Lagrange J. L.* Œuvres. T. 13. Paris: Gauthier-Villars, 1882. P. 147–148.

32. *Eneström G.* Verzeichnis der Schriften L. Eulers // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. Ergänzungsb. 4:1/2. 1910–1913.

Фриц Нагель
Базель, Швейцария

Базельские корни Леонарда Эйлера

Abstract: The article deals with Euler's roots in Basel. It traces his first learning and early scientific formation and presents the first papers which Euler has drafted in his native town.

Введение

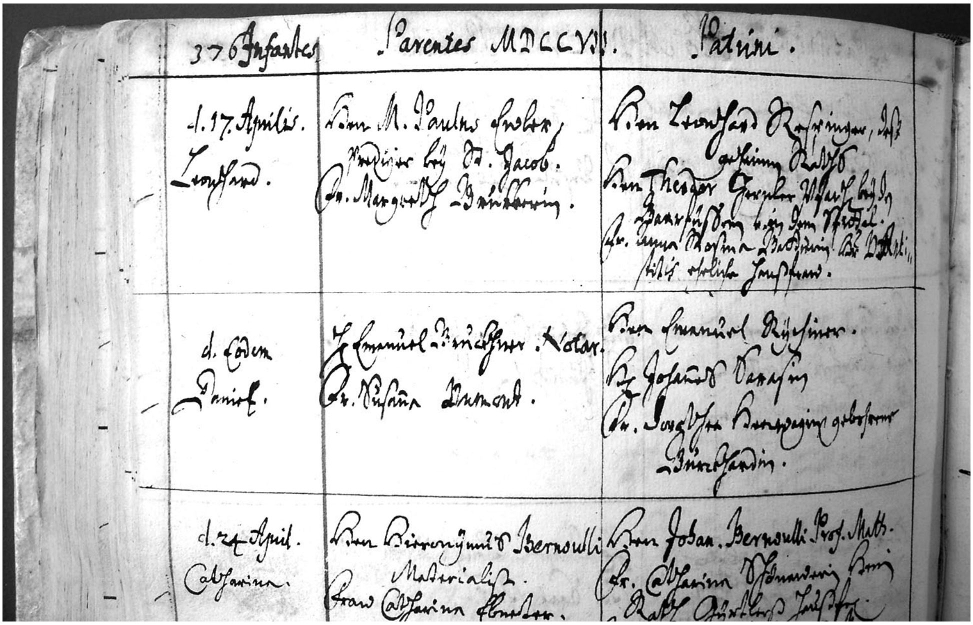
«Если блеск, которым сей великий муж озаряет весь век свой, озаряет и его отчизну, если город может гордиться заслугами выдающихся гениев, что вышли из его стен, дабы принести пользу миру талантами своими, доселе невиданными, то к кому же я с бóльшим правом мог бы обратиться сейчас с сей хвалебной речью, как не к тебе, дорогой незабвенный Базель, к тебе, колыбели Бернулли, Германа и Эйлера, имена коих Европа называет с трепетом и память о которых священна для любого почитателя наук!»

Этими словами в хвалебной речи в честь Леонарда Эйлера, написанной изначально на французском языке и опубликованной в Базеле по-немецки, характеризует Николай Фусс тесную связь между умершим за три года до этого гением века и его родным городом Базелем[1]. Но в чем же заключается эта тесная связь, и почему же Базель может гордиться своим великим сыном, хотя он всего лишь 20 лет провел у излучины Рейна и только в Санкт-Петербурге и Берлине стал тем известным человеком, имя которого даже спустя триста лет со дня рождения называет с трепетом Европа и более того — весь мир? В настоящей работе и предпринимается попытка дать ответ на этот вопрос.

I. Семья Леонарда Эйлера и Базель

«Я, Леонард Эйлер, родился в лето Господне 1707 апреля 15-го дня в девятом часу в Базеле. Отец мой, Пауль Эйлер, был назначен проповедником в деревню Рихен, что в часе [ходьбы] от Базеля, а мать мою звали Маргарита Брукер».

Из этих слов автобиографии Эйлера, которую он в 1767 году продиктовал в Санкт-Петербурге своему сыну Иоганну-Альбрехту[2], со всей определенностью следует, что Леонард Эйлер родился не на реке Бирс в Санкт-Якобе за городскими стенами и не в Рихене под Базелем, а в самом городе Базеле. В метрической книге его отец, правда, назван «проповедником у св. Иакова». Однако при тамошней церквушке в то время не было дома для пастора. Следовательно, родители Леонарда Эйлера жили, скорее всего, в городе. Так как в исторической поземельной книге нет записи о владении домом, можно предположить, что родители снимали жилье у бабушки и дедушки Леонарда. Как следует из документов, его бабушка и дедушка владели домами невдалеке от рыночной площади, а имен-



376 Infantes	Parentes MDCCVII.	Patrini.
d. 17. Aprilis. Leonhard.	Herr M. Paulus Euler, Prediger bey St. Jacob. Fr. Margreth Bruckerin.	Herr Leonhard Respinger, deß geheimen Raths Herr Theodor Gernler [illegible] Barfüßern bey dem Spithal. Fr. Anna Rosina Battierin [illegible] [illegible] ehliche Hausfrau.
d. eodem Daniel.	H. Emanuel [illegible] Notar. Fr. Susanna [illegible]	Herr Emanuel Ryhiner. H. Johannes [illegible] Fr. [illegible] geborene [illegible]
d. 24 April. Catharina.	Herr Hieronymus Bernoulli Materialist. Fraw Catharina [illegible]	Herr Johan. Bernoulli Prof. Math. Fr. Catharina [illegible] [illegible]

Запись в метрической книге церкви св. Мартина в Базеле от 17 апреля 1707 г. с указанием имен крестных (Staatsarchiv Basel, Kirchenarchiv GG1)

но, на Мюнцгассе и на Грюнпфальгассе. Так как, ввиду высокой младенческой смертности, детей тогда стремились окрестить как можно скорее в ближайшей церкви, совершенно логично, что Леонарда Эйлера окрестили в церкви св. Мартина 17 апреля 1707 года[3], ведь она располагалась как раз неподалеку от квартир бабушки и дедушки Эйлера.

Крестные родители проливают свет на социальное окружение его родителей. Первый крестный Леонард Респингер был членом Тайного совета и членом Тайного городского совета Тринадцати. В честь него и был назван Леонард Эйлер. Вторым крестным был Теодор Гернлер, священник в церкви францисканцев и капеллан госпиталя. Наконец, крестной стала Анна Розина Цвингер, урожденная Батье, вторая жена базельского епископа Иоганна-Рудольфа Цвингера, который приходился родственником матери Эйлера.

Теперь мы подошли к предкам Леонарда Эйлера. Эйлеры, предки по линии отца, происходили из вольного имперского города Линдау на Боденском озере. Там они занимались ремеслом, были гребенщиками. Первым предком, который покинул Линдау и переселился в Базель, был Ханс-Георг Эйлер по прозванию Шёльпин (Schölpin). В 1594 г. он стал гражданином Базеля и вступил в цех «Под шафраном». Сын и внук Ханса-Георга Эйлера, которые носили одно и то же имя — Пауль, остались гребенщиками. И только правнук, отец Эйлера Пауль, оставил карьеру ремесленника и выбрал предметом своих занятий богословие. Он женился на Маргарите Брукер, дочери пастора Иоганна-Генриха Брукера. По линии матери Эйлер связан с наследием базельского гуманизма. Дело в том, что среди предков матери есть несколько представителей семейства Цвингер, давшего миру именитых ученых, а также гебраист Бuксторф и латинист Целий Секундус Курий[4]. Среди предков матери был и Теодор-Рихард, пастор в церкви св. Леонарда. По этой линии Леонард Эйлер приходился родственником базельцу Якобу Герману, который позже станет его коллегой в Санкт-Петербурге, на что Эйлер вскользь указывает в автобиографии.

Сейчас можно лишь спекулятивно рассуждать о том, в какой мере Леонард Эйлер унаследовал от родственников со стороны отца усердие ремесленника, а от родни по материнской линии — склонность к интеллектуальному труду. Разумеется, социальное происхождение не могло не сыграть известную роль в духовном становлении ребенка в Базеле. В любом случае, происхождение и родительский дом стали уже сами по себе хорошим фундаментом для получения превосходного образования и дальнейшего продвижения в этой сфере.

II. Базель и формирование Эйлера

1. Домашнее образование

«Вскоре после этого родители мои отправились в Рихен, где в свое время отец стал давать мне первые уроки. И так как отец мой был одним из учеников всемирно известного Якоба Бернулли, то прежде всего стремился он научить меня началам математики, для каковой цели он пользовался книгой «Косс»[5] Кристофа Рудольфа с примечаниями Михаэля Штифеля, в чем я и упражнялся со всею прилежностью несколько лет».

Отец Леонарда Эйлера Пауль изучал в Базеле богословие и закончил учебу в 1693 году, получив степень «кандидата в священный сан», которая позволяла ему занимать место пастора. Как и любому студенту, сначала ему нужно было закончить факультет свободных искусств, где он в 1689 году получил степень магистра. Изучая таким образом основы наук, необходимо было посещать и лекции по математике, которые Пауль Эйлер слушал у Якоба Бернулли. Бернулли допустил к защите одну из диссертаций Пауля Эйлера, которая была напечатана в 1688 году под названием «Positiones mathematicae de rationibus et proportionibus». Очевидно, что, во время учебы отца Эйлера у Якоба Бернулли, Паулем овладела любовь к математике, и поэтому он довольно рано познакомил с этой наукой и сына, дарование которого он вскоре заметил.

Учебником, который он рекомендовал ребенку отчасти и для самостоятельного изучения, была впервые увидевшая свет в 1525 году книга «Косс» Кристофа Рудольфа, в которую при переиздании в 1553 году Михаэлем Штифелем были внесены многочисленные дополнения. В этой книге, содержащей 450 задач, автор вводит читателя в элементарную алгебру. Первая часть посвящена арифметике, здесь рассматриваются правила сложения, вычитания и умножения чисел со знаками, а также действия с одночленами и алгебраическими суммами. Во второй части рассматриваются уравнения и представлены действия с линейными, квадратными и биквадратными уравнениями; при этом решаются также уравнения с несколькими неизвестными и в отдельных случаях — даже кубические уравнения. В общем и целом в этом учебнике к мальчику 6–12 лет предъявляются довольно высокие требования, соответствовать которым в те годы могли, вероятно, лишь немногие дети. Исключением являлся Леонард Эйлер, который, по всей видимости, еще ребенком занимался в Рихене по этой книге.

2. Гимназия и частные уроки

«Когда я подрос, меня устроили жить к бабушке, чтобы отчасти тут же, в гимназии, отчасти при помощи частных уроков получить основы гуманитарных наук и вместе с тем совершенствоваться в математике».

С позиций сегодняшнего дня мы бы ожидали, что в гимназии на уроках Эйлер мог углубить свои знания основ математики. Однако дело обстояло не так. Детям, поступавшим тогда в базельскую гимназию, было по 6–7 лет. В школе было семь классов. По окончании школьнику позволялось слушать публичные лекции, т. е. они могли поступить на философский факультет университета. Первые два класса гимназии были начальной школой. В старших классах преподавались преимущественно латынь, греческий и факультативно древнееврейский. Логика и риторика должны были готовить к учебе в университете. Математика и естественные науки до второй четверти XVIII века в базельской гимназии представлены не были. Предложения касательно реформы, сделанные Иоганном I Бернулли, хотя и были первоначально приняты, однако затем их положили под сукно. Лишь в 1725–1726 гг., когда инспектором гимназии стал Иоганн Бернулли, ему удалось, как он сам и пишет, «nettoyer l'Augiae stabulum»[6] (вычистить авгиевы конюшни — *Прим. ред.*).

Воспользоваться плодами этих новшеств, введенных позднее, Леонард Эйлер не мог. Ему приходилось мириться с тогдашними недостатками школьного образования, и, прежде всего, — с отсутствием преподавания математики. Разумеется, об этом сожалел и его отец, поэтому он и решил пригласить репетитора, чтобы содействовать развитию способностей одаренного сына. Этим репетитором стал молодой богослов Иоганнес Буркхардт. Иоганнес Буркхардт родился в 1692 году в Базеле в семье ювелира. В год рождения Эйлера он поступил на философский факультет и закончил основной курс со степенью магистра. Затем он изучал богословие и стал в 1714 году «кандидатом в священный сан». В 1715 году он жил в Женеве. С 1721 по 1732 гг. он был пастором в Кляйнхюниге под Базелем и преподавал катехизис в базельской гимназии. В 1722 и 1731 гг. он безуспешно пытался занять кафедру логики, в 1732 году — кафедру догматики. Скончался он в 1743 году в Базеле. В 1721–1722 гг. Иоганнес Буркхардт тесно сотрудничал с Якобом Бернулли. Когда, к примеру, в 1719 году английский математик Брук Тэйлор на страницах лондонских «Philosophical Transactions» пытался публично защититься от обвинений в плагиате, которые, по его мнению, выдвигались в принадлежавшей перу Иоганна Бернулли работе «Epistola pro eminente mathematico», Буркхардт по поручению Иоганна Бернулли выпустил обширную полемическую работу, в которой подробно излагались претензии последнего на первенство и давалась его точка зрения на позицию математиков ньютоновской школы, что, в свою очередь, после письма Тэйлора к Бернулли, датированного 6 июля 1722 г., привело к еще одной публикации Буркхардта против Тэйлора, которая вышла в 1724 году в дополнительном томе «Acta Eruditorum»[7]. Таким образом, в те годы Иоганнес Буркхардт, вероятно, как никто другой был знаком не только с работами великого Иоганна Бернулли, но и с историей их возникновения, с их местом в научном контексте той эпохи. Именно в эти годы он был репетитором и Леонарда Эйлера, который учился в базельской гимназии примерно с 1713 по 1720 гг. В лице Буркхардта у мальчика был квалифицированный репетитор, познания которого в математике были на высоте того времени. О том, что Эйлер был связан с Иоганнесом Буркхардтом и в годы учебы в университете, свидетельствует тот факт, что он, будучи респондентом, защищал «Theses logicae» учителя в 1722 г., когда тот пытался занять кафедру логики[8].

3. Университет

По окончании гимназии, учебный план которой дополняли частные уроки у Иоганнеса Буркхардта, Леонард Эйлер поступил в университет. Как и все студенты, сначала он должен был пройти низший факультет (так называемый факультет свободных искусств или философский факультет). Минимальный возраст поступавших в университет составлял тогда в Базеле 13 лет. Граждане Базеля должны были закончить хотя бы два старших класса гимназии и в любом случае уметь читать и писать без ошибок, а также иметь основы знаний по латинскому языку, диалектике и риторике. Таким образом, младшие классы философского факультета брали на себя, в общем и целом, задачи старшей ступени сегодняшней гимназии.

Базельский университет был в XVIII веке единственным университетом на территории современной Швейцарии. Высшие учебные заведения в Цюрихе, Берне или Женеве были так называемыми академиями, которые, по сути дела, являлись специальными учебными заведениями, готовившими будущих священников, врачей и адвокатов к выполнению профессиональных обязанностей и не обладавшими особыми «привилегиями». И, прежде всего, они не имели права присуждать ученые степени магистра и лиценциата юриспруденции, не говоря уже о докторской степени.

Базельский университет, как практически и все университеты средневековья и XVII–XVIII вв., был не исследовательским, а учебным центром. Обучение здесь велось по принципу заранее заданной учебной нормы, т. е. истину здесь не искали — ее преподавали. На лекциях, таким образом, читался — как правило, под диктовку или при помощи учебника — и комментировался строго определенный учебный материал. Произнося речи и участвуя в диспутах, студенты должны были научиться воспроизводить и применять выученное. Поэтому риторика и красноречие занимали важное место, были и специальные кафедры, ибо внимание уделялось в равной мере как содержанию, так и форме доклада.

Новое время с его успехами в области новейших математических наук вскоре, разумеется, выявило недостатки этой средневековой структуры университета. Поэтому уже в 1691 году в анонимном «Мемориале» Якоб Бернулли предложил ряд мер по устранению структурных недостатков[9]. Основную их причину он видел, при этом, в различном жаловании профессоров в зависимости от факультета. Профессора младшего факультета, к которому и относились, прежде всего, математика и физика, получали намного меньше, чем те, кто занимал кафедры богословия, юриспруденции или медицины. Базельский профессор математики мог прожить с семьей за счет своего официального жалования в лучшем случае девять месяцев в году. Система провоцировала, более того — фактически закрепляла практику перехода профессоров с младшего на один из старших факультетов совершенно без учета компетентности кандидата для занятия кафедры в соответствующей области знания. Такой подход — и это было мнение не только Якоба Бернулли — затруднял или даже делал совершенно невозможным приспособление университета к изменившимся требованиям современности, когда основной упор делался уже на естественные науки.

Таким образом, в студенческие годы Эйлера учебный процесс на философском факультете протекал в классической форме. Четыре штатных профессора, у каждого из которых было по два класса, читали четыре часа в неделю публичные лекции. Объем учебного материала был задан программой заранее; в себя он включал лишь элементарные сведения по соответствующему предмету. Наряду с этим можно было предлагать и частные занятия, о содержании, времени и плате за которые профессора должны были договариваться со студентами. Тем самым можно было исполнить желания студентов касательно формального и содержательного дополнения учебного процесса за счет сжатых и доходчивых частных уроков («privata»). Кроме того, так удовлетворялась потребность профессоров в приработке к жалованию, увеличить которое официально не было никакой возможности.

Наряду с посещением лекций студенты были обязаны читать речи в кругу товарищей, чтобы приобрести по риторике навык чтения докладов, а по диалектике — навык аргументации. Этой практике следовал и молодой Леонард Эйлер. Так появился текст его речи «Declamatio de Arithmetica et Geometria», которую четырнадцатилетний Леонард прочел в 1721 году, и где он призывает товарищей «вместе с ним изведать благость науки»[10]. В одном переплете с этой рукописью находится текст еще одной речи «De Temperantia», за которой следует далее небольшое сочинение без даты под названием «Разрешение мнимого противоречия в аналитическом понятии отрицательных величин», где молодой Эйлер опровергает тезисы некоего доктора Краузе из Лейпцига. Сделанная от руки пометка на первой странице указывает на то, что рукопись эта прежде, вероятно, принадлежала Иоганну Бернулли и что эти ранние работы Эйлера были написаны, таким образом, под руководством Иоганна Бернулли. Ранней встрече с Иоганном Бернулли во время учебы на младшем факультете в Базеле суждено было стать решающим этапом на пути Эйлера-студента.

4. Патрон Эйлера Иоганн Бернулли (1667–1748)

«В лето Господне 1720 я поступил в университет и был допущен к слушанию публичных лекций, где вскорости мне выпал случай быть представленным известному профессору Иоганну Бернулли, который находил особое удовольствие в том, чтобы помогать мне в постижении математических наук».

Этими словами Эйлер указывает на решающее влияние своего великого учителя. Проработав 10 лет профессором математики в Гронингене, Иоганн Бернулли вернулся в Базель после смерти брата Якоба в 1705 году, чтобы получить его кафедру, которую Иоганн и занимал до своей смерти в 1748 году. После того как Лейбниц в 1684 году опубликовал в лейпцигских «Acta Eruditorum» под заголовком «Nova methodus pro maximis et minimis» далеко не всем понятное изложение принципов своего дифференциального исчисления, Иоганн Бернулли и его брат Якоб были первыми математиками, не принадлежавшими к кругу друзей Лейбница, кто самостоятельно проработал принципы нового исчисления. Благодаря работе, проделанной Иоганном Бернулли, дифференциальное и интегральное исчисления завоевали место в преподавании математики и стали доступны учащимся; вместе с братом он развивал, в сотрудничестве с Лейбницем, это направление дальше. Частные уроки, которые он давал маркизу де Лопиталю, позволили последнему опубликовать первый учебник дифференциального исчисления «Analyse des infiniment petits». Решение проблемы брахистохроны, которое Иоганн Бернулли дал «математикам всего мира» еще в 1697 году в Гронингене, сделало его ученым с европейской славой. Многие именитые ученые навещали его затем в Базеле, чтобы Бернулли объяснил им в ходе приватных занятий методы нового исчисления бесконечно малых.

В университете Иоганн Бернулли, напротив, преподавал только элементарную математику и астрономию, что не доставляло ему никакого удовольствия. Названия курсов, которые он читал в 1720–1727 гг., позволяют судить о том, что Эйлер изучал на официальных лекциях: 1719–1720 гг. — курс геометрии, 1721 г. — теоретическая и практическая арифметика, 1722–1723 гг. — избранные теоремы для практического применения, 1724–1725 гг. — элементы астрономии, 1726 г. — элементы геометрии, 1727 г. — астрономия. Таким образом, на занятиях разбирался традиционный материал, в котором практически никак не учитывались новейшие открытия и, прежде всего, — методы математики бесконечно малых[11].

Исследовательской работой Иоганн Бернулли занимался за рамками учебного процесса в университете. Результатами ученые обменивались в частных кружках, они публиковались и обсуждались в таких научных журналах, как «Acta Eruditorum», «Journal des savants», «Giornale di letterati d'Italia». Важными органами были академические учреждения Лондона, Парижа, Берлина и Санкт-Петербурга. В любом случае, новые методы исчисления бесконечно малых и интегрального исчисления преподавались не в университете, а, в лучшем случае, — интересующимся за плату на частных уроках. Так, в Базеле бывали такие именитые ученые, как Пьер-Луи Моро де Мопертюи, Алекси Клеро, Самуэль Кениг, Джузеппе Верзалья и другие, которые иногда на несколько недель останавливались, за отдельную плату, в доме Иоганна Бернулли и брали у него уроки. Когда же Джузеппе Верзалья поспешно уехал, так и не заплатив соответствующего гонорара, Иоганн Бернулли расценил это как нарушение правил хорошего тона. Только на этих частных семинарах, как мы назвали бы их сегодня, можно было изучить тогда в Базеле методы решения дифференциальных уравнений, познакомиться с подходом к проблемам траекторий или с решениями проблем механики. Как же сориентировался высокоодаренный, но молодой и небогатый Эйлер в этой академической среде, которая оставляла за скобками новейшие исследования, делая их предметом рассмотрения в частных кружках? По этому поводу он пишет в автобиографии следующее:

«Хотя он (Иоганн Бернулли — Ф. Н.) и отказал мне наотрез в частных уроках ввиду своей занятости, но он дал мне куда как более действенный совет, который заключался в том, чтобы я взял сам несколько более трудных книг по математике и проработал их со всем тщанием, а если же мне встретятся препятствие или

затруднения, то мне было позволено запросто являться к нему по субботам пополудни, и он был настолько добр, что объяснял мне накопившиеся трудности, и это приносило столь желанную пользу, ибо он устранял одно препятствие, но благодаря сему исчезал сразу десяток других, каковая метода, несомненно, наилучшим образом способствует тому, чтобы счастливо преуспевать в науках математических».

Итак, Иоганн Бернулли нашел путь, как помочь Эйлеру добиться того, чего он искал, — получить знания о новейших методах математики. Для этого он избрал метод, который больше всего подходил для высокоодаренного юноши: самостоятельное изучение новых методов и перспектив их приложения с возможностью обсуждать возникающие проблемы и вопросы с преподавателем, который сам эти методы создал или внес значительный вклад в их разработку. Этой возможности у Эйлера не было бы ни в каком ином месте. Подготовленный занятиями с отцом и уроками репетитора молодой человек мог пользоваться советами и научной компетенцией математика, который после смерти Лейбница стал «наставником Европы» («praeceptor Europae») и который неслучайно назван на эпитафии в церкви св. Петра «Архимедом своего века» («Archimedes sui saeculi»). Общаясь с таким учителем, который, к тому же, с радостью отмечал одаренность ученика, Леонард Эйлер был участником событий в авангарде математического сообщества своего времени.

III. Работы Эйлера базельского периода

«В лето Господне 1723 мне присвоили степень магистра, после того как за полтора года до этого я получил по тамошнему обычаю «primat lauream». Затем по совету семьи я поступил на богословский факультет, где я кроме богословия особое внимание должен был уделять греческому и древнееврейскому, в чем особых успехов не было, ибо большую часть своего времени я посвящал математическим штудиям».

К сожалению, работа Эйлера на соискание степени магистра (Disputatio pro gradu) утрачена, и это тем более обидно, поскольку Эйлер в ней сравнивал декартовское учение о природе с учением Исаака Ньютона. Если бы дело обстояло иначе, то мы, вероятно, могли бы почерпнуть из этого текста непосредственные сведения о позиции Эйлера в споре о влиянии тел друг на друга, который разгорелся в начале эпохи нового естествознания. Дело в том, что, по Декарту, такое влияние возникает только благодаря давлению или удару, тогда как Ньютон в качестве объяснения впервые приводит таинственную дистанционно действующую силу гравитации. Относительно последней в 1723 году выдвигались еще серьезные возражения, и не в последнюю очередь учителем Эйлера Иоганном Бернулли. Таким образом, мнение Эйлера по данному вопросу представляет для нас особый интерес.

Первая опубликованная работа Эйлера, которая возникла еще в этот базельский период, касается темы, к которой тогда обращался в своих исследованиях Иоганн Бернулли[12]. Речь идет о построении так называемой изохроны в среде с сопротивлением трения (механико-геометрическая задача о линии наиболее скорого спуска — *Прим. ред.*). Иоганн Бернулли уже много сделал по этой теме, определив саму изохрону, при условии движения тела в сопротивляющейся среде, как циклоиду. Однако он в своих работах ограничился допущением сопротивления трения, которое пропорционально квадрату скорости движущегося тела. Эйлер в первой своей базельской работе развивает идеи своего учителя далее, рассматривая проблему изохроны при условии любой функциональной зависимости сопротивления от скорости.

Вторая работа Эйлера базельского периода снова подхватывает тему, которой специально занимался его учитель Иоганн Бернулли[13]. В 1720–1721 гг. сын Иоганна Бернулли Николай II вместе с отцом поставил проблему определения взаимных траекторий. Речь здесь идет об определении кривых, которые каждый раз совпадают со своими траекториями. В качестве простейшего примера алгебраической кривой с этим свойством Иоганн Бернулли привел полукубическую параболу с уравнением $y^3 = ax^2$. Английский математик Генри Пембертон также решил эту проблему и сообщил свое решение в 1724 году анонимно и в частично зашифрованной форме Иоганну Бернулли. Иоганн Бернулли предполагал, что автором решения является Брук Тэйлор, вследствие чего развернулась долгая полемика о методах решения. Работа Иоганна Бернулли, подводящая итоги работ по этой теме, вышла в 1727 году в IX дополнительном томе «Acta Eruditorum».

Эйлер, в свою очередь, в написанной еще в Базеле работе дает новое решение для определения уравнения взаимных траекторий определенной алгебраической кривой третьей степени. Исходя из методов решения Иоганна Бернулли, Эйлер обращается к спрямляемым алгебраическим кривым. В своей работе он с благодарностью называет Иоганна Бернулли «Praeceptor meus hisce in rebus atque Patronus summe colendus»[14] (Мой наставник в этих трудах и высокочтимый покровитель — *Прим. ред.*). К теме обратных траекторий Эйлер позднее обращается в другой своей работе (E 005), указывая в ней общий метод решения[15]. Работа, возникшая в июле 1727 года, т. е. вскоре после отъезда из Базеля, была представлена в 1728 году Петербургской Академии наук. Эта первая петербургская работа вышла там из печати в 1729 году в «Комментариях» («Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae» — *Прим. ред.*).

Иоганн Бернулли высоко оценил успехи Эйлера в разработке этого нетривиального круга проблем. В работе «Continuatio materiae de trajectoriis reciprocis...» он пишет: «То, что дело это не является невозможным, видно из того, что сделал высокоодаренный юноша Леонард Эйлер, от удивительной сообразительности и остроумия которого мы ожидаем самых обильных плодов, после того как мы увидели, с какой легкостью и с какой ловкостью он поднялся под нашим покровительством к вершинам высшей математики»[16]. Это публичное признание способностей его известным учителем можно, вероятно, рассматривать как своего рода «посвящение в рыцари», которое широко распахнуло перед Эйлером врата блестящей научной карьеры.

Своей следующей созданной в Базеле работой Эйлер снискал известность и в «Республике ученых». Объявив в 1727 году конкурс работ, Парижская академия поставила задачу найти лучший способ расстановки мачт на судне в открытом море. Эйлер принял участие в этом конкурсе с работой по этой навигационной проблеме[17]. Ветер и вода действуют на парус и на корпус корабля, рулевое весло создает силу сопротивления. Все вместе они, таким образом, определяют скорость корабля и создают относительно него крутящий момент. Вертикальная составляющая крутящего момента, создаваемого ветром и силами сопротивления воды, должна компенсироваться крутящим моментом, подаваемым на рулевое весло, чтобы корабль шел по курсу. Таким образом, при расстановке мачт необходимо, чтобы эта вертикальная составляющая оставалась минимальной. Горизонтальная составляющая суммарного крутящего момента вызывает боковую и килевую качку корабля. Чтобы эта качка оставалась минимальной, сила ветра должна как можно интенсивнее действовать на паруса. Это достигается использованием расширяющихся книзу парусов и нескольких мачт.

В своих размышлениях Эйлер везде предполагает, что силы ветра параллельны, и для каждого отдельного паруса определяет среднюю линию приложения силы. Общая сила и вертикальная составляющая суммарного крутящего момента в этом случае те же, что и в том случае, когда несколько мачт заменяются одной мачтой, точка крепления которой на оси диаметральной плоскости палубы судна выбирается так, что относительно этой точки статический момент горизонтальных составляющих сил ветра исчезает. Многочисленные паруса заменяются одновременно одним парусом с той же общей площадью. Так Эйлер подходит к формулам, которые показывают, где находится оптимальное место для установки мачты на корабль, на какой высоте следует закреплять парус соответствующей ширины, и какую максимальную скорость может развить корабль.

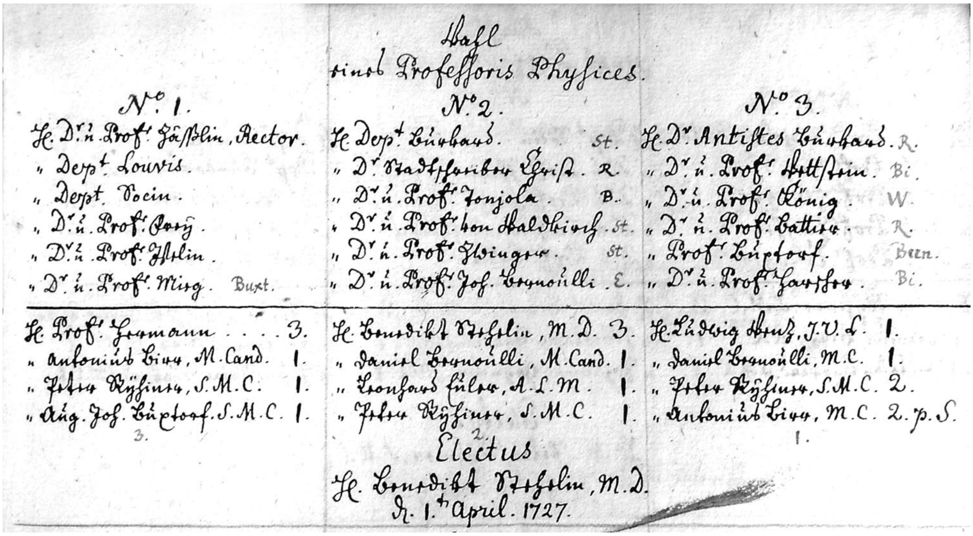
Хотя за эту работу Эйлеру не присудили первую премию Парижской академии, которая досталась Бугеру, однако он всё же получил так называемый «accessit», что было эквивалентно второй премии и предусматривало публикацию его работы Академией. Вместе с тем, эта награда означала официальное признание его методов работы и доступ в круг виднейших европейских математиков и естествоиспытателей.

IV. Отъезд Леонарда Эйлера из Базеля

Как известно, некоторое время после сдачи экзамена на степень магистра Леонард Эйлер изучал в Базеле богословие. Однако вскоре он оставил эти занятия, чтобы вновь заняться математикой: спустя некоторое время ему пришлось начать поиски постоянного места работы. Когда после смерти профессора Иоганна Рудольфа Бека освободилась кафедра физики в Базеле, Эйлер попытался получить это место. Относительно причин его неудачи на выборах в литературе часто выдвигаются разные предположения, в которых исторические факты смешиваются с недоказанными утверждениями. Поэтому здесь необходимо дать краткий анализ фактов с опорой на письменные источники.

В Базеле процедура избрания по конкурсу на замещение вакантной кафедры предусматривала, что кандидат должен был показать, в своего рода «докторской диссертации», свои способности в соответствующей области. Поэтому Эйлер, претендуя на кафедру физики, представил на диспут работу о звуке[18]. В первой части этой работы он рассматривает природу и распространение звука; в ней он, среди прочего, рассчитывает скорость звука и сравнивает полученный результат с уже имеющимися. Во второй части он сначала исследует звукообразование в результате колебания твердых тел, таких как струны, барабаны, инструменты с язычками или колокольчиками. Далее он рассматривает звукообразование в результате быстрых движений воздуха (например, при размахивании прутьями, при выстрелах из мортиры и при раскатах грома). Наконец, он исследует звук, производимый трубами (флейтами, органными трубами), и рассчитывает, соответственно, частоты возникающих при этом тонов. В приложении к этой работе Эйлер формулирует несколько тезисов для дискуссии, из которых здесь стоит упомянуть три: «1. Система заранее установленной гармонии тела и души, на основании которой предполагают, что действия тела и души едва ли зависят друг от друга, не соответствует действительности. 2. Ньютоновская сила притяжения является в высшей степени подходящим правилом, чтобы объяснить все феномены небесных тел, и посему я верю, что, вне всяких сомнений, все тела по природе своей взаимно притягиваются. 3. Предположим (что далеко не соответствует действительности), что центр Земли притягивает тело в обратной пропорции квадрату расстояния и Земля имеет сквозное отверстие, проходящее через ее центр. Тогда встает вопрос, что случится с камнем, брошенным в это отверстие, когда он достигнет центра. Останется ли он там или проследует дальше через центр? Или он начнет в этом месте обратное движение по направлению к нам? Я предполагаю последнее». Последний из этих трех тезисов, вновь выставленный в полемике между Мопертюи и Самуэлем Кенигом, Вольтер позднее поставит Эйлеру в упрек, объявив это положение особенно смехотворным.

После представления «докторской диссертации» и ее принятия факультетом должны были состояться выборы кандидата. Если было несколько кандидатов, то с 1718 года выборы проводились в соответствии с процедурой, которая предусматривала жеребьевку, т. е. использовалась так называемая «баллотировка». Примером для университета была процедура выборов на государственные должности[19]. На определенных ступенях отбора кандидатов эта система предусматривала жеребьевку, чтобы ограничить несправедливую протекцию со стороны родственников. Выборы на университетскую кафедру проводили, как правило, 18 выборщиков, среди которых были ректор, четыре представителя органов государственной власти и члены факультета, если они были членами регенции, высшего университетского собрания. Сначала, при помощи баллотировки среди выборщиков, формировались три коллегии. Затем в первом туре каждый член коллегии отдавал свой голос за одного из кандидатов. Три кандидата, набравшие наибольшее число голосов, образовывали так называемый «тренар» и проходили во второй тур. Если кроме первых двух кандидатов, набравших в первом туре наибольшее число голосов, было еще два, получивших одинаковое число голосов, то жребий («per sortem») решал, кто станет третьим в тренаре. Таким образом, в последний тур проходили три кандидата. Набравший большинство голосов считался избранным. При одинаковом числе голосов и здесь все решала жеребьевка между кандидатами, входящими в тренар. Базельская процедура выборов не являлась, таким образом, чистой жеребьевкой — она представляла собой комбинацию выборов, где для победы нужно было набрать большинство голосов, и жеребьевки между кандидатами при равном числе голосов; жеребьевка, кроме того, использовалась при распределении выборщиков по коллегиям для проведения выборов.



Wahl
eines Professoris Physices.

N.° 1.	N.° 2.	N.° 3.
H. Dr. u. Prof. Fäßlin, Rector.	H. Dep.t Burkard. St.	H. Dr. Antistes Burkard. R.
" Dep.t Louvis.	" Dr. Stadtschreiber Christ. R.	" Dr. u. Prof. Wettstein. Bi.
" Dept. Socin.	" Dr. u. Prof. Fonjola. B.	" Dr. u. Prof. König. W.
" Dr. u. Prof. [illegible].	" Dr. u. Prof. von Waldkirch. St.	" Dr. u. Prof. Battier. R.
" Dr. u. Prof. Iselin.	" Dr. u. Prof. Zwinger. St.	" Prof. Buxtorf. Bern.
" Dr. u. Prof. Mieg. Buxt.	" Dr. u. Prof. Joh. Bernoulli. E.	" Dr. u. Prof. Harscher. Bi.
H. Prof. Hermann . . . 3.	H. Benedikt Stehelin, M.D. 3.	H. Ludwig Wentz, J.V.L. 1.
" Antonius Birr, M. Cand. 1.	" Daniel Bernoulli, M. Cand. 1.	" Daniel Bernoulli, M.C. 1.
" Peter Rychiner, S.M.C. 1.	" Leonhard Euler, A.L.M. 1.	" Peter Rychiner, S.M.C. 2.
" Aug. Joh. Buxtorf. S.M.C. 1. 3.	" Peter Rychiner, S.M.C. 1. 2.	" Antonius Birr, M.C. 2. p.S. 1.

Electus
H. Benedikt Stehelin, M.D.
d. 1.t April. 1727.

Выдержка из протокола неудачных для Эйлера выборов на вакантную должность профессора физики базельского университета от 1 апреля 1727 г. (Universitätsbibliothek Basel Mscr. VB O 12a)

О подробностях хода выборов с участием Эйлера в качестве кандидата мы знаем благодаря списку, составленному базельским богословом и священником Иоганном Якобом Хубером (1731–1800), в котором даются сведения с 1660 по 1800 гг[20]. Наряду с перечнем лекций, читавшихся по случаю вступления в должность, с напечатанными по этому случаю приглашениями на них, этот том содержит, на последних шести листах, рукописные сведения о выборах профессоров в виде списков. Здесь приводятся, например, имена членов трех коллегий выборщиков, результаты их голосования, число голосов, поданных за каждого кандидата, данные о возможных, при известных обстоятельствах, жеребьевках, и окончательные результаты жеребьевок в тренарах с датами выборов.

Выборы ординарного профессора кафедры физики состоялись 1 апреля 1727 года. Кандидатами были Даниил Бернулли, кандидат медицины, Антоний Бирр, кандидат медицины, Август-Иоганн Букстерф, кандидат богословия, Якоб Герман, профессор, Петер Рюхинер, кандидат богословия, Бенедикт Штеелин, доктор медицины, Людвиг Вентц, лиценциат обоих прав, а также Леонард Эйлер, магистр свободных искусств. Уже из списка академических званий видно, что шансы Эйлера были невелики. В то же время, другие кандидаты, напротив, уже закончили один из старших факультетов. Почетные места занимали professor primarius Якоб Герман и преподававший в Санкт-Петербурге Даниил Бернулли, Эйлер же имел только степень магистра младшего философского факультета. Поэтому неудивительно, что в первом туре победили профессор Герман и доктор Штеелин, за которыми следовали набравшие по два голоса кандидаты Петер Рюхинер и Антон Бирр (жребий пал на Антона Бирра). Магистр Леонард Эйлер получил, напротив, только один голос — голос своего наставника Иоганна Бернулли. Возможно, учитель Эйлера отдал бы предпочтение Даниилу Бернулли, если бы регламент не запрещал голосовать за сына. В любом случае, на этих выборах

Эйлер не прошел даже в тренар. В последнем туре в результате жеребьевки на выборах победил Бенедикт Штеелин. Штеелин, который поступил в университет в тот же год, что и Эйлер, получил, таким образом, кафедру физики, которую занимал до 1747 года, после чего его преемником стал Даниил Бернулли.

Итак, Леонард Эйлер был вынужден искать другое место, которое гарантировало бы ему профессиональный рост и известный доход. Поэтому он с благодарностью принял предложение, которое ему сделали Николай II и Даниил Бернулли, сыновья его учителя Иоганна Бернулли, в связи с их приглашением в основанную незадолго до этого Академию наук в Санкт-Петербурге[21]. В автобиографии он пишет:

«Приглашенные в Санкт-Петербург братья Бернулли заверили меж тем меня, что они выхлопочут для меня по прибытии туда пристойное место, что вскоре после того и произошло; тогда же я решил применить мои математические познания в медицине. Так как новость эту я получил в начале зимы 1726 года и не мог предпринять эту поездку до грядущей весны, то я поступил на медицинский факультет в Базеле и со всем рвением приступил к изучению врачебной науки».

Эйлер был зачислен на медицинский факультет Базельского университета 2 апреля 1727 года. Однако, так как благодаря рекомендациям Даниила и Иоганна Бернулли, к которым присоединился и Христиан Гольдбах, президент Петербургской академии Лаврентий Блюментрост еще в сентябре 1726 года назначил Эйлера «elève», то он отплыл в Россию уже три дня спустя после зачисления (т. е. 5 апреля 1727 года). Никогда больше он не видел родного города. Несмотря на это, переписка с базельскими друзьями, его научные занятия «базельскими проблемами», а также принесенные им в дар библиотеке Базельского университета собственные работы и получение базельского гражданства для жены и детей свидетельствуют, что всю жизнь Эйлер был связан с Базелем. Наконец, самое почетное звание, которого Эйлер удостоился, также ведет свое происхождение из Базеля, где великий Иоганн Бернулли назвал бывшего ученика «несравненным Леонардом Эйлером, князем математиков»[22]. С благодарностью вспоминали Базель и Базельский университет своего великого сына на многочисленных мероприятиях в 2007 году.

V. Резюме и заключение

Если бросить ретроспективный взгляд на становление Эйлера в Базеле, то мы можем особо отметить следующее. В силу наследственных факторов (как по отцовской, так и по материнской линии) у Леонарда Эйлера был, среди прочего, особый математический дар. Отец, ученик Якоба Бернулли, питавший особый интерес к математике, заметил дарование сына и содействовал его раскрытию, дав ему в руки трудный учебник математики и пригласив репетитора. Благодаря урокам у преподавателя, который, будучи учеником и сотрудником Иоганна Бернулли, обладал выдающимися познаниями в математике, Эйлер ликвидировал пробелы, обусловленные преподаванием математики в Базельской гимназии. Счастливым случаем, который мог произойти только в Базеле, является и тот факт, что Леонард Эйлер встретил в Базельском университете одного из ведущих математиков своего времени, который отметил его одаренность и оказал ему действенную помощь своими консультациями. Первые работы, выполненные под руководством Бернулли, его признание и публичное «посвящение в рыцари» открыли перспективы блестящей научной карьеры.

Тот факт, что Эйлер безуспешно претендовал на кафедру физики в Базеле, впоследствии оказался на самом деле еще одним счастливым случаем. В Базельском университете Эйлер смог бы только передавать уже накопленные знания, он или не имел бы возможности заниматься самостоятельными исследованиями, или эти возможности были бы очень ограниченными. Будучи в Петербургской и Берлинской академии профессором-исследователем, не связанным преподаванием, он мог полностью посвятить себя своим научным интересам. Вместе с тем, там он нашел научную среду, которая позволяла обмениваться результатами и дискутировать, завязывать личные контакты с выдающимися учеными. Наряду с этим, перед ним там открылись такие возможности для общения и публикаций, которых у него никогда не было бы в Базеле. Итак, Базель, потеряв Эйлера из-за неудавшейся попытки получить кафедру, подарил его миру.

Благодаря образованию, полученному в Базеле, Эйлер смог стать тем, кем стал, — выдающимся гением века. Этого Эйлер никогда не забывал. Семейными узами он всю свою жизнь был связан с родным городом, благодаря тесному научному сотрудничеству с базельскими коллегами он стал «заочным членом» кружка Бернулли, глава которого, Иоганн Бернулли, даже объявил его, наконец, «князем математиков». Благодаря оживленным научным контактам Леонарда Эйлера с Базелем, говоря словами уже процитированной во введении к этой статье работы Николая Фусса, «блеск, которым сей великий муж озаряет весь век свой, дошел и до его отчизны», поэтому Базель, наряду с Петербургом и Берлином, может гордиться «заслугами выдающегося гения», который триста лет тому назад «вышел из его стен», — Леонарда Эйлера.

Примечания:

[1] *Fuss N.* Lobrede auf Herrn Leonhard Euler. Basel: Schweighauser, 1786.

[2] См. [*Euler Johann Albrecht*] Meines Vaters Lebens-Lauf so wie er ihn mir selber in die Feder dictirt hatte. Geschrieben zu St. Petersburg den 1^{n} December 1767. Рукопись находится в Санкт-Петербургском филиале Архива РАН. Цитировано по *Fellmann Emil A.* Leonhard Euler. Reinbek: Rowohlt, 1995. S. 11–13.

[3] Метрическая книга церкви св. Мартина хранится в государственном архиве города Базеля, в ней запись от 17 апреля 1707 г. о крещении Леонарда Эйлера.

[4] Целий Секундус Курий (Celio Secondo Curione, Celius Secondus Curio) (1503–1569) — латинист; Теодор Цвингер (Theodor Zwinger) (1533–1588) — медик и знаток греческого языка; Иоганн Букстορф (Johann Buxtorf) (1564–1629) — гебраист; Якоб Цвингер (Jakob Zwinger) (1569–1610) — медик и филолог-классик; Теодор Цвингер (1597–1654) — богослов и декан кафедрального собора в Базеле.

[5] (Книга «Косс» («Die Coss») — учебник алгебры Христофа Рудольфа, немецкого математика первой половины XVI века. Coss — старое немецкое название алгебры. — *Прим. ред.*)

[6] Основными направлениями инициированной им реформы были уменьшение числа классов, система учителей-предметников, равноправие всех учителей в том, что касается ранга и оклада, правильное распределение школьников по классам с учетом их способностей, более целесообразные экзамены, награды за прилежание и умение. Впервые вводилось преподавание немецкого языка, «так как не менее необходимо, чтобы юношество

наше вовремя привыкло сочинять нечто приятное и изящное на нашем родном немецком языке», то необходимо два–три раза в неделю требовать историю, письмо или что-либо еще в этом роде. Арифметика и геометрия преподавались по «Mathesis juvenilis» Штурма и по учебному плану, разработанному самим Якобом Бернулли. В дальнейшем Я. Бернулли собирался ввести преподавание географии с использованием карт и глобусов. Разумеется, преподавались история и закон Божий, при этом последний включал в себя катехизис и библейскую историю.

[7] *Burcard J. M.* Joannis Burcardi Basil. Modesta seria Responsio ad literas Broock [sic] Taylori, quae extant in Act. Lips. 1722 pag. 452 // AE Suppl. T. VIII. 1724. Sect. V. P. 219–222.

[8] *Burckhardt Johannes.* Theses logicae vere tumultuarie... respondente ingeniosissimo juvene Leonhardo Eulero... Basel: Lüdi, 1722.

[9] О «Мемориале» см.: *Nagel Fritz.* Jacob Bernoullis Vorschläge zur Universitätsreform in den Basler Unruhen von 1691 // Der Briefwechsel von Jacob Bernoulli. Basel: Birkhäuser, 1993. S. 248–254.

[10] «Quare ut et vos et meipsum ad gustandas illarum delicias excitem singularem laudes ordine enarrabo». *Euler Leonhard.* Declamatio de Arithmetica et Geometria. Basel, 1721. Библиотека базельского университета, рукопись L I a 46.

[11] С физикой дела обстояли еще хуже. Так, например, профессор физики Иоганн-Рудольф Бек читал в 1718–1724 гг. о доктрине о душе (Doctrina de anima), а в 1724–1726 гг. — о доктрине о движении (Doctrina de motu), т. е., очевидно, о классических темах аристотелевской философии и физики.

[12] *Euler L.* Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente (E 001) // AE, 1726. Aug. P. 361–363.

[13] *Euler L.* Methodus inveniendi trajectorias reciprocas algebraicas (E 003) // AE, 1727. Sept. P. 408–412.

[14] Ibid., P. 408.

[15] *Euler L.* Problematis trajetoriarum reciprocarum solutio (E 005) // Comm. T. II (1727), 1729. P. 90–111.

[16] *Bernoulli Johann I.* Continuatio materiae de trajectoriis reciprocis... // AE Supplementa. T. IX. Leipzig, 1729. P. 277.

[17] *Euler L.* Meditationes super problema nautico, de implantatione malorum, quae proxime accessere at praemium anno 1727 a Regia Scientiarum Academia promulgatum (E 004). Paris: Jombert, 1728.

[18] *Euler Leonhard.* Dissertatio physica de Sono... (E 002) Basel: Thurneisen, 1727.

[19] О положении о выборах в университете см.: *Staehelin Andreas.* Geschichte der Universität Basel 1632–1818. Basel, 1957. S. 57–70.

[20] *Huber Johann Jacob.* Programmata ad Lectiones auspicatorias Professorum Universitatis Basiliensis ab Anno 1660 ad Annum 1760 / Библиотека базельского университета, рукопись VB O 12a (без указания страниц и листов).

[21] О роли базельских ученых в первые годы существования Петербургской академии см.: *Nagel Fritz und Verdun Andreas, [ред.],* «Geschickte Leute, die was praestiren können.... Gelehrte aus Basel an der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften des 18. Jahrhunderts. Vorträge des Symposiums vom 10. Juli 2003 an der Akademie der Wissenschaften von St. Petersburg während der «Schweizer Wochen» anlässlich der Feierlichkeiten «300 Jahre St. Petersburg» // Deutsch-russische Beziehungen in Medizin und Naturwissenschaften. Bd. 11. Aachen: Shaker, 2005.

[22] «Viro Incomparabili Leonhardo Eulero Mathematicorum Principi» — обращение в письме Иоганна Бернулли Эйлеру от 23 сентября 1745 г.

Перевод с немецкого языка М. В. Корышева

Martin Mattmüller
Basel, Switzerland

The First Modern Mathematician? Euler's Influence on the Development of Scientific Style*

Аннотация: Кроме множества блестящих научных открытий, Леонард Эйлер внес в математику больший порядок своими методами написания научных работ и преподавания. В этом отношении он сделал больше, чем кто-либо со времен Эвклида: его новые методы подачи научной мысли имели продолжительное влияние. Данная работа привлекает внимание к этой всё еще мало изученной стороне деятельности Эйлера и описывает некоторые характерные черты его образа мысли, работы и общения[1]. Особенное внимание уделяется нововведениям Эйлера в области математической символики, их истокам, истории публикаций и последующему развитию.

Beyond his innumerable brilliant insights, Leonhard Euler shaped mathematics by his way of writing and teaching — more so than anybody else since Euclid: his innovations in the presentation of scientific thought exerted a lasting influence. The present paper directs attention to this yet little understood aspect of Euler's accomplishments and describes some characteristic features of his style of thought, work and communication[1]. Particular attention is paid to Euler's many innovations in mathematical notation, to their origins, publication history and subsequent development.

1. "The master of us all"[2]

Mathematicians are more aware of the historical development of their discipline than most scientists; indeed progress in mathematics rather occurs by cumulating ever more knowledge on the sound bases laid by our predecessors than by discarding their erroneous theories. Thus it happens quite often that mathematicians interested in the history of their subject would like to cast an eye at the pioneering works of the "scientific revolution" that occurred in the 17th and early 18th century: Descartes' *Géométrie* or the *Nova Methodus*, in which Leibniz laid the foundation of differential calculus, Newton's *Principia* or the *Ars Conjectandi*, Jacob Bernoulli's great treatise on probability.

---

[*] Extended version of a lecture presented at the International Conference «L. Euler and Modern Science», St. Petersburg, May 16, 2007.

The author wishes to thank Jordan Bell (Department of Mathematics, University of Toronto) for checking the English text. All remaining errors are, of course, mine.

Thanks are also due for the opportunity to speak at this Tercentenary Conference in the city where Leonhard Euler spent a large, very productive part of his life, and for the honour thus conferred on the Euler Archive in the great Swiss mathematician's native city and on the Euler Committee, which has been responsible for the edition of Euler's Collected Works for exactly a hundred years now.

This is, however, very likely to be a frustrating experience: the ground-breaking research of those great men has become quite inaccessible — even in translations — to the modern mathematician without expertise in the history of science. The notation, the style of thinking and reasoning, the standards of demonstration, the manner of addressing a specific target audience have changed so fundamentally since then that our contemporaries will even have trouble recognising "what it is all about" and will in general be unable to follow an exposition that has, after all, laid the base for their own subject.

All this is quite different if our 20th- or 21st-century expert gets his hands on some work of Leonhard Euler's — e. g., the *Introductio in Analysin Infinitorum*, the great textbooks on differential and integral calculus or the *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Here we recognize the words and signs of the mathematics we are familiar with, we follow the reasoning and calculation in all its details, we gratefully acknowledge that these are the roots of our own practice in research and teaching. We agree with the following passage from the preface of the *Algebra*'s first English translator, Francis Horner:[3]

> "if he [i. e. the reader] has any taste for the beauties of method, and of what is properly called *composition*, we venture to promise him the highest satisfaction and pleasure. The subject is so aptly divided, the order is so luminous, the connected parts seem so truly to grow one out of the other, and are disposed altogether in a manner so suitable to their relative importance, and so conducive to their mutual illustration, that, when added to the precision, as well as clearness with which every thing is explained, and the judicious selection of examples, we do not hesitate to consider it... the most perfect model of elementary writing, of which the scientific world is in possession."

In the course of the two or three generations which separate Euler from the inventors of analytic geometry, infinitesimal calculus and stochastics, mathematics as a whole took the shape that characterizes it up to the present day.

Euler is not alone in this endeavour; his work rather marks the culmination point of a process of careful foundation and ordered, reader-oriented exposition of the new disciplines. Authors such as Frans van Schooten, the Marquis de l'Hôpital and Christian Wolff — he also played an important role in the establishment of the St. Petersburg Academy and the recruitment of its founding members — had significantly contributed to the public recognition of the new branches of mathematics. But of course Euler's textbooks obtain a special status by the fact that their author was at the same time the undisputed leader in the ongoing development of the entire field. His may well be the only case ever where the most brilliant and creative brain of a discipline also turned out authoritative textbooks by the dozen for education at secondary schools and universities — textbooks which guide the reader from the basic elements up to the cutting edge of contemporary research.

It is evident from several prefaces of his didactic works that this transmission of knowledge was important to Euler — beyond any obligations attached to his employment. In what is perhaps the most elementary book he ever published, the *Einleitung zur Rechen-Kunst* written for the Petersburg grammar school, he states his reasons for giving detailed explanations as follows:

> "Memorizing the rules of calculation without understanding neither suffices to resolve all cases that may occur, nor does it sharpen the intellect, which should be the principal goal of teaching. We have therefore taken pains to explain the

> reason of all rules and operations in this manual in such a way that even people not yet proficient in profound studies can understand and accept them.... By this approach we hope to obtain the benefit that youths should — besides learning the proper skill in calculating — always bear the true reason of every operation in mind and thus get gradually used to sound reasoning.... For every human being grasps and keeps in mind much more easily those facts of which he clearly sees the reason and origin, and is also able to make far better use of them in all cases that may occur" [1].

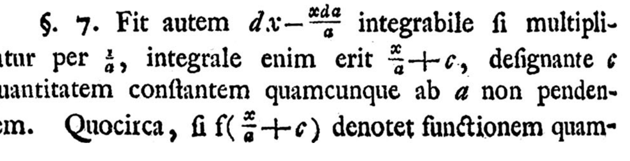
2. "Compendious and expressive" signs[4]

Euler introduced and established numerous signs, names and conventions in universal use in present-day mathematics. In the index of Cajori's classical monograph on the history of mathematical notation [2] Euler has more than twice as many entries as any other author. Among his innovations we find, for example, the Δ sign for differences (and iterated differences), Σ for sums[5], $\left[\frac{p}{q}\right]$ for binomial coefficients [3], the $\frac{(a,b,c,d,...)}{(b,c,d,...)}$ notation for continued fractions [4] and the indication of bounds ("ab $x = a$ ad $x = b$...") with the integral sign [5]. Euler is responsible for the general use of conventions as natural to us as brackets[6] — until then the grouping of terms had often been disregarded as obvious or denoted by typographically difficult overlines called *vincula* —, the denotation of the sides of a triangle *ABC* by the corresponding lower-case letters *a*, *b*, *c*[7] or the signs for the trigonometric functions sine, cosine, tangent and their inverses still in use[8].

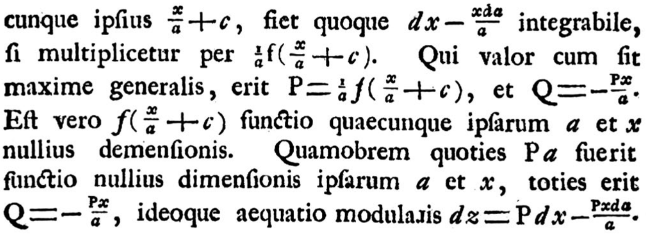
An even more important development was started by Euler when he gave the concept of a function the central position it now holds. For Leibniz, *functio* had been a rather vague designation for several variable geometrical quantities connected with a curve (abscissa, subtangent etc.). In Johann I Bernoulli's works we find the idea of a quantity "composed in some way from a variable and constants"[9], and he also is the first to use a generic symbol for the "characteristic" of an arbitrary function[10].

In his early manuscript *Calculus Differentialis*, Euler adopts his teacher's definition almost literally, but gives it much greater significance by basing his entire system of analysis on it[11]. A remarkably consistent development leads from this to the *magnum opus* published around the middle of the century: at the start of the six-volume series of Euler's analysis textbooks, the first book of the *Introductio* again begins with the "explication of functions of variable quantities"[12].

As for the sign, the familiar notation of a function with its argument by $f(x)$ seems to have arisen almost by accident: indeed, it first occurs in the following paragraph from a paper on families of integral curves published in 1738 [6]:



§. 7. Fit autem $dx - \frac{xda}{a}$ integrabile ſi multiplicatur per $\frac{1}{a}$, integrale enim erit $\frac{x}{a} + c$, deſignante c quantitatem conſtantem quamcunque ab a non pendentem. Quocirca, ſi f($\frac{x}{a} + c$) denotet functionem quam-



cunque ipſius $\frac{x}{a}+c$, fiet quoque $dx-\frac{xda}{a}$ integrabile, ſi multiplicetur per $\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$. Qui valor cum ſit maxime generalis, erit $P=\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$, et $Q=-\frac{Px}{a}$. Eſt vero $f(\frac{x}{a}+c)$ functio quaecunque ipſarum a et x nullius demenſionis. Quamobrem quoties Pa fuerit functio nullius dimenſionis ipſarum a et x, toties erit $Q=-\frac{Px}{a}$, ideoque aequatio modularis $dz=Pdx-\frac{Pxda}{a}$.

In what follows, the argument of f is set in brackets only when it is a sum, since then the lack of brackets would lead to a parsing error. Even much later Euler pragmatically used notations such as $f\,.\,y$, $\Phi:(xx+yy)$ and $\Phi.\,\frac{x}{y}$ alongside each other [7]. However, even if the utilization of a generic function symbol with bracketed argument never became a standard convention with Euler, the way towards the modern notation had been paved: after the more or less simultaneous use by Clairaut and d'Alembert, it was universally established by Lagrange around the turn of the 18th century. On the other hand, it was again Euler who first perceived the utility of the symbol for functions of several variables: in a 1753 paper on the oscillations of strings [8] he writes for the first time $y = \Phi\ (x, t)$ for the displacement's dependence on the abscissa x and the time t.

In addition, Euler did not only use established symbols for particular functions such as the logarithm (again denoted variably and without clear distinctions by L., l., *l*, Log., log., log) or the trigonometric functions, but also introduced — mainly in number theory — new functions with a specific, fixed symbol, such as[13] $\int n$ for our $\sigma(n)$, the sum of divisors of n, and πD for the totient function which counts the numbers $< D$ coprime to D [9]. The fact that Euler first investigated as important transcendental functions as the gamma and the zeta function can be disregarded here, since he did not introduce specific designations for them[14].

What impelled Euler to develop this plethora of "compendious and expressive" signs? Apparently he was motivated just as much by the wish to clarify his own ideas as by the need for user-friendly communication. Like only very few of his time's research scientists he time and again pondered the origins, conceptual clarity and practical convenience of symbolic notation as a set of conventions for mathematical discourse. This is shown, for example, by the following quotation from the *Institutiones* on the relative merits of the "continental" and English ways of describing infinitesimal calculus (where Euler also displays a remarkably disinterested attitude towards the controversies rampant at the time)[15]:

> "The English mathematicians... use different words and signs, naming the infinitely small differences that we call differentials mostly *fluxions*, sometimes *increments* — words which suit the Latin usage better and express the denoted matter quite conveniently...
>
> Although it would thus be unreasonable to quarrel with the English about the definition and use of these words..., there is no doubt that we have the advantage with regard to the signs. Indeed they denote the differentials, which they call fluxions, by dots written above the letters, $\dot{y}$ meaning the first fluxion of y, $\ddot{y}$ the second fluxion, $\dddot{y}$ the third fluxion and so on. Matters of notation being arbitrary, this cannot be criticized as long as the number of dots is small; but when one has

> to write more dots, it causes great confusion and much inconvenience. A tenth differential or fluxion is denoted most awkwardly by $\overset{\vdots\,\vdots}{\ddot{y}}$, whereas in our notation as $d^{10}y$ it is easy to understand. There are also cases in which differentials of an even higher or indeed indefinite order have to be expressed, and for this the English notation cannot be used at all.
>
> So we will use our own words and signs...; all the same it was convenient to mention the denominations and symbols used by the English, so that those who read their books can understand them too. Indeed the English do not adhere so stubbornly to their style that they would utterly repudiate what is written in ours. On our part we have studied their works with great curiosity and drawn much use from them; and we also often observe that they have read our writings to some avail....
>
> It should be understood that here the letter *d* does not denote a quantity, but is used just as a sign for expressing the word "differential" — in the same way as we are accustomed in the theory of logarithms to use the letter *l* as a sign for the logarithm or in algebra √ as a radical sign.... It would be desirable that these letters *d* and *l* be printed in somewhat altered characters, so they are not confused with the letters of the alphabet used to denote quantities — similarly as the distorted sign √ is now generally used instead of the letter *r* that formerly stood for the word *radix* (root)."

3. "Euler's formula": e, π, i and how they are connected

The signs for the three most important irrational numbers occupy a special place among Euler's best-known and most often used innovations. What had before him been called "the base of the hyperbolic logarithm" is now known as **e**, "the circumference of a circle of diameter 1" has been ever since denoted by π, the "imaginary unit" — i. e., the extraordinary number which solves the equation $x^2 = -1$ — is simply called *i*. Let us have a short look at the genesis of these notations and at the use Euler made of them.

Apparently Leibniz was the first to note that it would be useful to have a special, fixed sign for the base of the natural logarithm: in his letters to Huygens from 1690/91 he uses *b* to denote this and writes explicitly: "*b* estant une grandeur constante, dont le logarithme est 1" [10]. Johann Bernoulli initially employs *a*, later *c* with this meaning[16]; his sons and Euler in an early paper[17] follow suit. The letter **e** to denote the base appears for the first time in a manuscript by Euler, written towards the end of the 1720s, but published only in 1862 from the large stock of his papers preserved in the Archive of the St. Petersburg Academy. In analysing a series of ballistic experiments dating from 1727 he writes [11]:

"Scribatur pro numero, cujus logarithmus est unitas, ***e***, qui est 2,7182818..., cujus logarithmus secundum Vlacq. [i. e., in a table of base-10 logarithms published by the Dutch printer Adriaan Vlacq] est 0,4342944."

There has been a lot of speculation about the reasons for this momentous change in notation: in fact, *c* had already been used in the paper in question for the diameter of the cannonball, but *a* or *b* for "base" would still have been available. The conjecture that Euler wanted to leave a memorial to himself by using his family name's first letter is inconsistent both with the personal nature of the note and with everything we know about his self-perception, and must be dismissed as an inane legend[18]. All things considered it seems most plausible he just alluded to the word "exponential". In any case, from 1728 onwards Euler used the letter **e** not exclusively, but for the most part[19]. After the 1736 *Mechanica*, the systematic and clearly explained account of exponential and logarithmic calculation in chapters VI and VII of the *Introductio* resulted in the almost general acceptance of the notation in the second half of the 18th century.

The Greek lower-case letter π also owes its universal role as denotation for the "circular number" to Leonhard Euler. In the 17th century the ratio of the diameter and circumference of a circle had still mostly been represented by a proportion[20]: Oughtred, certainly alluding to the words διάμετρος (diameter) and περιφέρεια (periphery), wrote[21] 7 . 22 :: δ . π. The modern notation first appears in a small compendium of formulae edited by the Welsh Newtonian William Jones. On occasion of a series invented by Machin we read [12]:

"...as for instance, in the *Circle*, the Diameter is to the Circumference as 1 to $\overline{\frac{16}{5}-\frac{4}{239}}-\overline{\frac{16}{5^3}-\frac{4}{239^3}}$, &c. = 3.14159, &c. = π. "

Euler in the early years of his career writes $p : d$, then in algebraic and analytic contexts simply p for the ratio of circumference and diameter; then, in the mid-1730s, he analyzes Machin's series calculation and at the same time begins to use π. Goldbach, Johann I and Nicolaus I Bernoulli, then Segner, Kästner, Daviet de Foncenex, Diderot and Laplace follow. So in this case Euler only disseminated a notation which had been introduced into the mathematical literature a year before he was born.

The third of the constants we are considering here, the "square root of −1", goes back, as a concept, far beyond Euler: as is well known, Italian algebraists successfully introduced imaginary numbers into mathematics around 1500. However, many subsequent generations of mathematicians learned the hard way that an uncritical application of the symbol $\sqrt{-1}$ (with or without a double sign ±) can also soon lead to antinomies. Even Euler was not immune to mistakes like the — at least imprecise — statements[22] that the product of $\sqrt{-1}$ and $\sqrt{-4}$ is $\sqrt{4}=2$ or that dividing 1 by $\sqrt{-1}$ yields $\sqrt{-1}$. Whether his motive was a certain uneasiness about paradoxes of this kind or just the wish for typographical simplification, in any case, a few years later Euler introduced the notation that was to settle the problem. In a paper presented to the St. Petersburg Academy in 1777, but printed only in the posthumous fourth volume of *Institutiones calculi integralis*, one reads [13]:

"...formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posterum designabo, ita ut sit $ii=-1$ ideoque $\frac{1}{i}=-i$."

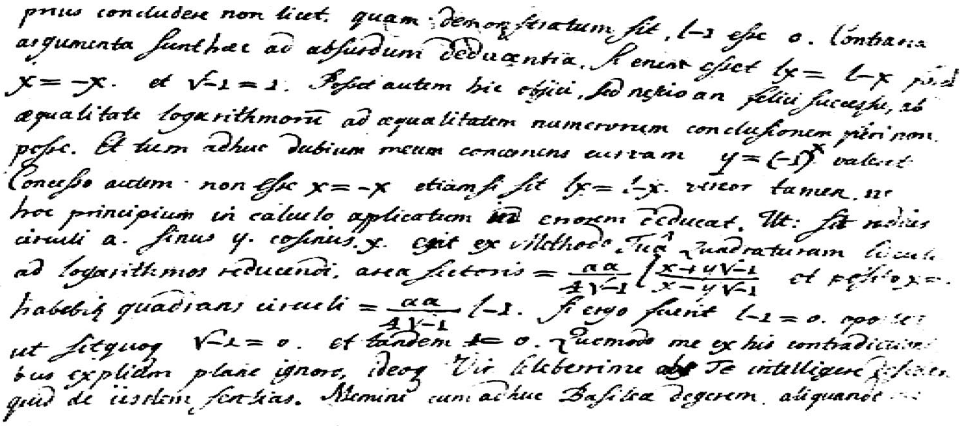
It is due mainly to Gauss that the new symbol thus defined was soon adopted into general mathematical usage.

It would probably be taken amiss if I did not add a few remarks here about the formula in which Euler — if it was indeed he[23] — linked the three quantities just mentioned by a stunningly simple identity:

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

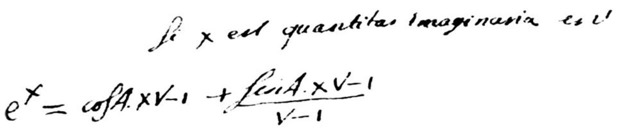
About this most famous of all "Euler's formulas" — in a recent opinion poll among experts it was once more elected the most beautiful mathematical statement of all[24] — a lot has been written, particularly in the last few years[25]; so let me just document here briefly *what* can be found *where* in Euler's works and what *isn't* there.

Euler's investigation originated from a controversy between Leibniz and Johann Bernoulli about the determination of logarithms of negative numbers[26]. Starting in November 1727 Euler corresponded with his Basel teacher about this question, finally recording a statement which follows directly from an integration performed by Bernoulli in 1702[27]:



prius concludere non licet, quam demonstratum sit, $l-1$ eſſe 0. Contraria
argumenta ſunt haec ad abſurdum deducentia. Si enim eſſet $lx = l-x$ [illegible]
$x = -x$. et $\sqrt{-1} = 1$. Poſſet autem hic objici, ſed neſcio an felici ſucceſſu, ab
aequalitate logarithmorum ad aequalitatem numerorum concluſionem fieri non
poſſe. Et tum adhuc dubium meum concernens curvam $y = (-1)^x$ valet.
Conceſſo autem non eſſe $x = -x$ etiamſi ſit $lx = l-x$. vereor tamen ne
hoc principium in calculo applicatum in errorem deducat. Ut: ſit radius
circuli a. ſinus y. coſinus x. erit ex methodo Tua quadraturam circuli
ad logarithmos reducendi, area ſectoris $= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} l \frac{x+y\sqrt{-1}}{x-y\sqrt{-1}}$ et poſito $x =$.
habebitur quadrans circuli $= \frac{aa}{4\sqrt{-1}} l-1$. Si ergo fuerit $l-1 = 0$. oportet
ut ſit quoque $\sqrt{-1} = 0$. et tandem $1 = 0$. Quomodo me ex his contradictioni-
bus expediam plane ignoro, ideoque Vir Celeberrime abs Te intelligere percuperem
quid de iisdem ſentias. Memini cum adhuc Baſileae degerem, aliquando

With hindsight Euler's statement "...habebitur quadrans circuli $=\frac{aa}{4\sqrt{-1}}\ell-1$" is easily transformed into $\log(-1)=\pi\sqrt{-1}$, but Euler never explicitly noted down either this identity or its exponential form. On the other hand, the *general* formula linking logarithms of complex numbers and trigonometric functions rather suddenly turns up in a notebook[28] which should probably be dated to the autumn of 1741:



ſi x eſt quantitas imaginaria erit

$$e^x = \cos A. x\sqrt{-1} + \frac{\sin A. x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$$

Notebook IV, p. 185 (detail)

Euler hinted at this newly-discovered connection in many of his letters and papers from the 1740s; but even a long time after the definitive, systematic explanation of the entire subject in his *Introductio*[29], his new understanding of the logarithm as an "infinitely multi-valued function" gave rise to much debate — especially with d'Alembert. On the other hand, Johann Bernoulli, in the last years of his life, seems to have taken notice of Euler's solution to the problem with satisfaction: in the late 1760s Euler told an Italian visitor that his old teacher had, by his own statement, died content at having seen these irreconcilable contradictions resolved[30].

4. Accounting for everything in the world

Euler's insatiable curiosity made many phenomena that had been neglected as being either too trivial or too complex accessible to mathematical analysis. It is evidently not possible here to discuss the countless insights in Euler's 800 research papers; but his outstanding ability to perceive mathematical structure in everything he encountered must be substantiated by a few examples. For two millennia before him, teachers and students had constructed special points such as the orthocenter, circumcenter, and centroid of countless triangles; and yet it was reserved for Euler to see — and to prove — that those three points always lie on a straight line [14]. Or take the polyhedron formula[31]: Any child can count the vertices, edges, and faces of some irregular "brick" — but before 1750 (almost) nobody had struck on the idea to consider the combination $v - e + f$ and to note the astonishing fact that this always yields the number 2. A stroll on the bridges of Königsberg, the line-up of officers for a parade, the moves of a chess knight, mirrors, spinning tops and musical chords: Euler's inimitable way of looking at the world drew mathematical structure from literally everything.

To be sure, Euler would not have had to depend on this kind of fortuitous observations; he was never short of commissions for application-oriented, immediately useful research. Rarely was the commissioning party disappointed, and neither was Euler himself, who often got generous rewards for results of that kind. A long series of papers on the construction of ships, telescopes, compasses, watches, pumps, and bridges showed the contemporary world that this was a scientist who did not rest within an ivory tower of useless abstractions, but was ready to put his insight at the service of a better living for everybody.

Even in the last few days of his long life — before on September 18th, 1783, he "ceased to calculate and live"[32] — he strove to get a scientific handle on the hottest news from all over the world: the orbit of the recently discovered planet Uranus and the uplift that had just carried the Montgolfier brothers on their first balloon flight[33].

5. "A great scholar and a good human being"[34]

Let me finally touch on another facet of Leonhard Euler's distinctive style: his attitude towards his working environment of colleagues and students — both close to home and farther away. His open, generous exchange of ideas set standards of fruitful collaboration within the scientific community. Compared with the jealous infightings for prestige going on between the Leibnizians and the Newtonians, the nationalist pretensions of the French, British or German "school", or the machinations of his own teacher Johann Bernoulli, the remarkable openness with which Euler discusses what he is working on strikes the eye. Time and again he presents work in progress in his correspondence and his published papers, admits dead ends, suggests alternatives, takes counsel with his colleagues and competitors. Research means to him a common task shared not just with his own institution's team, but with all the international, interdisciplinary Republic of Science. With imperturbable tenacity he holds on to investigations in which a first approach has not been successful, and is yet able to rejoice honestly when another scientist makes the decisive breakthrough.

This was for example the case of Lagrange's proof that every natural number can be written as the sum of four squares — a theorem Euler had worked on for forty years, producing important partial results. His examination of Lagrange's result, in which incidentally the proof is considerably simplified, begins with the words[35]:

> "Since I have myself often worked a lot on this subject, without however arriving at a completely satisfactory demonstration, I have perused with all the greater joy the proof that Mr. Lagrange recently published, and have been amazed at his perfectly settling the question...."

Generosity towards his colleagues and students seems indeed to be a salient feature of Euler's psychological makeup, and this certainly contributed a lot to the unanimously positive account of his character that his contemporaries gave. Let me add some more small "case studies":

> — Young Leonhard had just arrived at St. Petersburg when an ugly quarrel broke out between his friend and flatmate Daniel Bernoulli and the prominent academician Bülffinger about a prize question in astronomy set by the Paris Academy. It speaks for the twenty-year-old adjoint's natural diplomatic talent that he managed to keep out of those "squabbles"[36], which also involved Jacob Hermann and Daniel's father in Basel; what's more, Euler was even able to publish a concise, correct and entirely non-polemical solution of the problem in the St. Petersburg Academy's journal [15].
>
> — When Frederick II of Prussia asked his academic expert's advice on the best available textbook of ballistics in 1742, Euler did not hesitate to recommend the *New Principles of Gunnery* by the British engineer Benjamin Robins, even though Robins had just attacked his *Mechanica* as being faulty and impractical. A true cosmopolitan of the Republic of Science, Euler translated the book from English (a language he actually learnt for this purpose!) and expanded it by his additions from the original 152 to 736 pages. The work, which had been enormously upgraded by Euler's contributions, was retranslated into English during his lifetime, and it is said that a young artillery officer called Napoleon Bonaparte learnt his ballistics from the French edition[37].
>
> — In 1750, the French mathematician d'Alembert had failed to win a prize from the Berlin Academy, learnt by an indiscretion that Euler was responsible for this, and broke with him in a venomous letter. Several times in the following years he made charges of plagiarism against his former paragon; but Euler, refusing to be bothered by this, not only made amends for the reference to an astronomical paper of d'Alembert's which he had inadvertently omitted, but even ceded precedence to him in a question of algebraic geometry where he could have in fact perfectly legitimately insisted on his own priority[38]. Many years later this peaceable comportment was to bear fruit when d'Alembert refused to stand, by Frederick's instigation, against Euler as a candidate for president of the Berlin Academy.
>
> — In 1763 a young Swiss craftsman named Christoph Jetzler knocked at Euler's door in Berlin. For family reasons, he had had to renounce an academic career and had instead taken the profession of furrier. Now, after his father's death, he finally could follow his scientific inclinations. Without ado, the world-famous professor provided his compatriot with a room, let him copy, sheet by sheet, the textbook on integral calculus on which he was working, and helped him with his difficulties in understanding the new theory. Even after his return to

his native city of Schaffhausen, Jetzler could count on Euler's help in explaining the subject [16].

What can one learn about Leonhard Euler's personality from those examples? Even keeping in mind that during most of his life a well-paid "research chair" relieved him from the necessity of competing for a living, a fundamental tenor of human kindness, generosity and composure must certainly be noted. The ability to "discard the learned appearance in the study, hide his superiority and attune himself to everybody's capacities" which his first biographer attests to [17] is perhaps not the least of the accomplishments by which this great scientist from Basel fascinates us even after three centuries.

Notes:

[1] One of the few papers dealing with these issues is *Alexanderson G. L.* Ars Expositionis: Euler as Writer and Teacher // Mathematics Magazine. 1983. Vol. 56. P. 274–278, recently reprinted in: The Genius of Euler. Reflections on his Life and Work / Ed. W. Dunham. Washington: Mathematical Association of America. 2007. P. 61–68.

[2] "Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous" — Laplace's request to his students, as reported by Guglielmo Libri (Journal des Savants. 1846. P. 51.).

[3] Quoted from the third edition in English: E 387 E^3 (Elements of Algebra. London, 1822. P. XIX.). [Citations of Euler's works start with the E number given by the "Eneström index": *Eneström G.* Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. Leipzig: Teubner, 1910.]

[4] The pretty description of the goals pursued in designing scientific notation by the words "compendious" (i. e. concise, easy to handle) and "expressive" is taken from Christian Goldbach's letter to Euler of October 1st[?], 1744. There Goldbach closes a debate on several usual and newly designed signs for "greater or equal" with the statement that Bouguer's sign is "zwar nicht compendiöß, aber sehr expressif".

[5] Both in E 212. (Institutiones calculi differentialis. Petropoli, 1755. § 4, § 26.) (= LEOO I, 10. P. 16, 32.)

[6] Cajori ([2], T. 1, P. 394): "The constant use of parentheses in the stream of articles from the pen of Euler that appeared during the eighteenth century contributed vastly toward accustoming mathematicians to their use."

[7] E 214. (Principes de la trigonométrie sphérique // MAS Berlin. 1755. T. IX. § 30.) (= LEOO I, 27. P. 294.) The denotation of the angles of the triangle by the corresponding Greek letters α, β, γ was introduced by A. G. Kästner in 1764.

[8] The most consistent introduction of the signs "sin.", "cos.", "tang." and "A. tang." for the arctangent – all still including abbreviation dots — is in E 101. (Introductio in analysin infinitorum. T. I. Lausannae, 1748. § 127, § 26.) (= LEOO I, 8. P. 134–135, 149.) Starting with E 214 (cf. note 7) Euler also uses the version without dots.

[9] "Definition. On appelle ici *Fonction* d'une grandeur variable, une quantité composée en quelque maniére que ce soit de cette grandeur variable & de constantes" — Johann I Bernoulli (Op. CIII, Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres // MAS Paris. 1718) (= Johannis Bernoulli Opera Omnia. T. II. Lausannae & Genevae, 1742. P. 241.)

[10] "...en prenant aussi Φ pour la caractéristique de ces fonctions elles-mêmes...": Ibid., P. 243.

[11] "§ 1. Quantitas quomodocunque ex una vel pluribus quantitatibus composita appellatur ejus unius vel plurium functio. Compositio autem vel additione, vel subtractione, vel multiplicatione, vel divisione, vel elevatione ad potestates, vel sumendis logarithmis, vel denique harum operationum pluribus simul absolvi potest": SPbF ARAN. F. 136. Op. 1. № 183. Fol. 1. A. P. Juškevič (L. Euler's unpublished manuscript Calculus Differentialis: Leonhard Euler 1707–1783. Gedenkband des Kantons Basel-Stadt. Basel: Birkhäuser, 1983. P. 161–170) dates this draft to Euler's first years at St. Petersburg.

[12] "Liber Primus, Continens Explicationem de Functionibus quantitatum variabilium...": E 101 (cf. note 8), p. 1. How far Euler had already developed his plans for his later textbooks of differential and integral calculus in the early 1730s, is shown by G. K. Mikhailov's analysis of his early manuscripts: Notizen über die unveröffentlichten Manuskripte von Leonhard Euler: Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen / Ed. K. Schröder. Berlin: Akademie-Verlag, 1959. P. 256–279. (In particular P. 264–265.)

[13] Euler to Goldbach, April 1st, 1747: "Wann n einen *numerum quemcunque integrum affirmativum* bedeutet, so soll $\int n$ die *summam omnium divisorum hujus numeri n* anzeigen." Euler really proposes to use an integral sign, not just a long s, as stated in E 242. (Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs // Bibliothèque impartiale. 1751. Vol. 3. § 2.) (= LEOO I, 2. P. 242.)

[14] The notation $\Gamma(x)$ was introduced by Legendre in 1825, $\zeta(x)$ by Riemann in 1857.

[15] E 212 (see note 5), § 115–119. (= LEOO I, 10. P. 84–86. (freely translated by M. M.))

[16] In a letter to Varignon written on December 12th, 1710, Bernoulli complains about a paper published by his former private student Giuseppe Verzaglia: "Vous jugerez aisément que ce n'est pas de son invention d'employer dans les formules, qu'il a publiées, la lettre c pour la quantité dont le logarithme est l'unité, si vous vous souvenez, que je m'en suis servi il y a bien 12 ans dans une de mes lettres que je vous ai écrite...": Der Briefwechsel von Johann Bernoulli. Vol. 3 / Ed. P. Costabel, J. Peiffer. Basel: Birkhäuser, 1992. P. 321. However, Bernoulli's memory is deceiving him: both in that earlier letter and in his paper Op. LIV in the 1699 *Acta Eruditorum* he had denoted the base by a (without elaborating the concept).

[17] E 10. (Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus // Comm. 1728 (1732). T. III. § 5.) (= LEOO I, 22. P. 3.): "...ubi c denotet numerum, cuius logarithmus est unitas".

[18] The questionable designation "Euler's number" for ***e*** seems to have arisen only in the 20th century — apparently first in America. The classical works on the history of mathematics by Cantor, Cajori and Tropfke do not cite it, and Eli Maor's recent monograph (**e** — The Story of a Number. Princeton: Princeton University Press, 1994) also does without it.

Euler's own remark on the question rather suggests using "Napier's number" for ***e***: In a letter to Goldbach written on January 8th, 1730, he writes: "Logarithmi hinc deducti sunt ii qui vocantur hyperbolici, eo quod iidem sint atque illi qui ex quadratura hyperbolae eruuntur; vocantur quoque Neperiani quia Neperus hujusmodi tabulas supputavit." However the table in the second English edition of Napier's *Descriptio* (London 1618) that Euler mentions is probably by William Oughtred!

In scientific usage expressions such as "Euler's number", "Euler's constant", and "Eulerian numbers" refer to several other objects: the ("Euler-Mascheroni") constant γ that occurs in summing the harmonic series, a dimensionless quantity describing pressure drop in fluid flow, and several sequences of integer numbers arising in combinatorics.

[19] In a letter to Goldbach from November 25th, 1731, for example, he writes quite in passing, as a matter of course: "Multiplicetur haec... per $\mathrm{e}^{-2v}v$ (e denotat hic numerum cujus logarithmus hyperbolicus est = 1)..."

[20] J. Ch. Sturm is one of the few exceptions: in his *Mathesis enucleata*, Norimbergae 1689, he denoted the number 3.14159... by — of all letters — ***e***.

[21] *Oughtred W.* Clavis mathematicae.... Editio Quarta. Oxoniae, 1667. Cap. XVIII. § 16.

[22] These examples (and two more mentioned by Cajori) occur in E 387. (Vollständige Anleitung zur Algebra. Part I. St. Petersburg, 1770. § 148–149.) (= LEOO I, 1. P. 56–57.) One should however bear in mind that Euler was almost completely blind by that time and could not supervise the printing of his work personally.

[23] For the merits of the (much-debated) priority attributions to Johann I Bernoulli (1702/1727), Abraham de Moivre (1707/1730) or Roger Cotes (1714/1722), see C. E. Sandifer's column of August 2007: "**e,** π and ***i***: Why is 'Euler' in the Euler identity?" at http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html.

[24] *Wells D.* Are these the most beautiful? // Math. Intelligencer. 1990. Vol. 12. № 3. P. 37–41. On a 0 to 10 scale "Euler's formula" rates an average of 7.7, followed by Euclid's proof that there are infinitely many primes, and Brouwer's fixed point theorem.

[25] Three reader-friendly recent publications devoting a chapter each to the formula and its genesis should be mentioned here: *Dunham W.* Euler: The Master of Us All. Washington: Mathematical Association of America, 1990; *E. Maor* (see note 18); *Nahin P. J.* An Imaginary Tale. Princeton: Princeton University Press, 1998. Nahin even used it as a tag for another monograph: Dr. Euler's Fabulous Formula Cures Many Mathematical Ills. Princeton: Princeton University Press, 2006 (however, the amusing title overlooks the fact that Euler never received a doctoral degree!).

[26] For the issues discussed here see — besides the many volumes of original sources that have been published since 1745 – the detailed explanations in: *Cajori F.* History of the Exponential and Logarithmic Concepts // American Mathematical Monthly, 1913. Vol. XX. P. 35–47, 75–84, 110–117, in A. P. Juškevič's and R. Taton's introduction to LEOO IVA, 5 (in particular P. 15–19), and in R. E. Bradley's knowledgeable essay: Euler, d'Alembert and the Logarithm Function // Leonhard Euler: Life, Work and Legacy / Ed. R. E. Bradley, C. E. Sandifer. Amsterdam: Elsevier, 2007. P. 255–277.

[27] Euler to Johann I Bernoulli, Dec. 10, 1728. (LEOO IVA, 2. P. 88 and note 5, P. 91.) The paper that Euler refers to is Bernoulli's Op. LXX. (Solution d'un problême concernant le calcul intégral.... // MAS Paris. 1702. P. 289–297.) (= Johannis Bernoulli Opera Omnia. T. I. Lausannae & Genevae, 1742. P. 393–400.)

[28] SPbF ARAN. F. 136. Op. 1. № 132. P. 185 (reproduced from a photograph in the Euler Archive, Basel). This singular note, jotted down without perceptible context, was first noted by G. K. Mikhailov (see note 12), P. 271.

[29] E 101 (see note 8). Cap. VIII. (= LEOO I, 8. P. 133–152.)

[30] This account by Gioacchino Pessuti is reported by Cajori (see note 26), P. 84, as a citation from: *Calandrelli G.* Saggio analitico sopra la riduzione degli archi circolari ai logaritmi immaginarii. Roma, 1778. It seems no more direct indications — e. g., in Euler's correspondence with his Basel colleagues — have been preserved.

[31] The statement appears first in a letter to Goldbach from November 14th, 1750, then in E 230, Elementa doctrinae solidorum // N. Comm. I (1758), § 33. (= LEOO I, 26. P. 78.); Euler's proof follows as E 231. (= LEOO I, 26. P. 94–108.)

[32] This elegant phrase comes from Condorcet's Eloge de M. Euler // Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris. 1783 (1786). P. 67. (= LEOO III, 12. P. 309.).

[33] E 579. (MAS Paris. 1784. P. 264–268.) (= LEOO II, 16. P. 165–169.) bears the title "Calculations on aerostatic balloons by the late Mr. Euler, *as they were found on his slate after his death.*"

[34] Quoted from the inscription by the historian of science and Euler biographer Otto Spiess for the commemorative plaque displayed since 1960 at Kirchgasse 8 in Riehen near Basel, where Euler grew up.

[35] E 445. (Novae Demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata // Nova Acta Eruditorum. 1773. P. 193.) (= LEOO I, 3. P. 218. (freely translated by M. M.))

[36] "Zänkereyen" ("squabbles") is the harsh characterization in the title of the file that the Academy's secretary, G. F. Müller, compiled on this affair. An analysis both of the scientific content and the personal background of the controversy by the editor M. Howald-Haller can be found in: *Bernoulli Daniel.* Werke 1. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 381–441.

[37] E 77. (Neue Grundsätze der Artillerie. Berlin, 1745.) (= LEOO II, 14. P. 1–409.) Bibliographical references, including those to the English and French translations, can be found in: *Eneström G.* Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. Leipzig: Teubner, 1910. P. 19.

[38] E 180. (Avertissement au sujet des recherches sur la précession des equinoxes // MAS Berlin. 1752. Vol. VI. P. 412.) (= LEOO II, 29. P. 124.) The tense relationship between Euler and d'Alembert is discussed in Juškevič, Taton and Bradley (see note 26).

References:

1. E 17. (Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii. St. Petersburg, 1738.) (= LEOO III, 2. P. 3–4.)

2. *Cajori F.* A History of Mathematical Notations. Open Court, Chicago, 1928/29.

3. E 575. (De mirabilibus proprietatibus unciarum quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt // Acta. 1784. T. V(1). § 18.) (= LEOO I, 15. P. 544.)

4. E 281. (Specimen algorithmi singularis // N. Comm. 1764. T. IX. § 13.) (= LEOO I, 15. P. 38.)

5. E 587. (Observationes in aliquot theoremata Illustrissimi de La Grange. §1: Opuscula analytica. Petropoli, 1785. T. II. P. 17.) (= LEOO I, 18. P. 157.)

6. E 45. (Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis // Comm. 1734 (1738). T. VII. § 7.) (= LEOO I, 22. P. 59.)

7. E 285. (Investigatio functionum ex data differentialium conditione // N. Comm. 1764. T. IX. § 24, 38, 41.) (= LEOO I, 23. P. 13, 18, 19.)

8. E 213. (Remarques sur les mémoires précédens de M. Bernoulli // MAS Berlin. 1755. Vol. IX. § 15.) (= LEOO II, 10. P. 239.)

9. E 564. (Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum // Acta. 1784. T. IV(2). § 3.) (= LEOO I, 4. P. 106.)

10. Leibnizens mathematische Schriften. Bd. II / Ed. C. I. Gerhardt. Berlin, 1850. P. 53, 76.

11. E 853. (Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta // OP. T. II. Petropoli, 1862. P. 800.) (=LEOO II, 14. P. 468.)

12. *Jones W.* Synopsis Palmariorum Matheseos. London, 1706. P. 263.

13. E 671. (De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet // Institutionum calculi integralis volumen quartum. Petropoli, 1794. P. 184.) (=LEOO I, 19. P. 130.)

14. E 325. (Solutio facilis problematum quorumdam geometricorum difficillimorum // N. Comm. 1767. T. XI. § 18.) (= LEOO I, 26. P. 149.)

15. E 14. (Solutio problematis astronomici.... // Comm. 1729 (1735). T. IV. P. 98–101.) (=LEOO II, 30. P. 1–4.)

16. *Fellmann E. A.* Christoph Jetzler und Leonhard Euler // NTM Journal of the History of Science, Technology and Medicine. Bd. 11. 2003. P. 145–154.

17. *Fuss N.* Lobrede auf Herrn Leonhard Euler.... Basel, 1786. P. 114. (= LEOO I, 1. P. XCII.)

С. С. Демидов
Москва, Россия

Леонард Эйлер и проблема колебания струны

Abstract: It examines the reasons (mathematical and ideological) why L. Euler and J. d'Alembert were unable to see that during their famous discussion on the nature of the arbitraries functions in the solution of the equation of the vibrating-string problem, their points of departure were not the same, with J. d'Alembert thinking in terms of the classical solution of differential equation whereas L. Euler had in mind what was later (but not until the twentieth century) to be included in the concept of the weak solution. The grounds he had for proposing an idea so bold for his time are discussed.

1. В 1749 году в третьем томе Мемуаров Берлинской Академии наук и изящной словесности за 1748 г. была опубликована статья Ж. Даламбера [1], содержавшая его знаменитое решение проблемы колебания струны — «формулу Даламбера». Результат произвел сильное впечатление на современников[1]. Одним из первых на него откликнулся в следующем томе того же журнала статьей «О колебании струны» [2] Леонард Эйлер. В ней он предложил свой мало отличавшийся от предложенного Ж. Даламбером метод решения проблемы колебания струны. Что, однако, было новым, он высказал свой взгляд на возможную природу начальной функции $u_0(x)$, входившей в выражение решения задачи

$$u(x,t)=\frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2},$$

задававшегося формулой Даламбера[2]. Согласно Эйлеру, в качестве начальной может быть избрана функция, графиком которой является произвольная кривая, описанная свободным движением руки, не обязательно представимая одним аналитическим выражением.

Это утверждение выглядело чрезвычайно смелым, ибо по представлениям того времени Calculus имел дело исключительно с функциями, задаваемыми единым аналитическим выражением, — «непрерывными» в терминологии того времени (чтобы отличать такое понимание терминов «непрерывный» и «разрывный» от принятого сегодня, будем заключать их в кавычки в случаях, когда они употребляются в смысле XVIII века). Эта произвольность, как он заметил позднее [3], ограничивалась лишь требованием сплошности кривой, задаваемой функцией $u_0(x)$, которое мы можем трактовать как требование непрерывности этой функции в сегодняшнем смысле данного термина. Выступая с таким, повторяю, смелым утверждением, Эйлер исходил из физической сущности задачи (струне можно придать начальную форму, соответствующую произвольной кривой, начертанной рукой) и из возможности строить решение, задаваемое формулой Даламбера, на всей плоскости при любой начальной функции. Однако предлагаемое Эйлером решение не является классическим, в современном значении этого термина, то есть оно не может превращать уравнение колебания струны в тождество, так как оно может иметь разрывы не только второй, но и первой производной (случай струны, составленной по форме из двух прямолинейных участков, сходящихся под углом в точке, в которой экспериментатор зацепил струну, скажем, гвоздем). По существу, Эйлер вводил в рассмотрение обобщенное решение задачи и чрезвычайно расширял поле применения анализа — от аналитических функций до функций кусочно-дифференцируемых. Однако делал он это совершенно некорректным образом — говоря, что такое решение удовлетворяет уравнению колебания струны, он нигде не пояснял, в каком смысле функция, не имеющая непрерывной первой производной, может ему удовлетворять. Некорректность рассуждений Л. Эйлера вызвала резкий отпор со стороны Ж. Даламбера.

2. В ряде публикаций (см., например, [4]) Даламбер выдвинул против позиции Эйлера несколько возражений математического и физического характера (об этом см. [5]). Эти возражения, по причине слабой разработанности в XVIII веке оснований математического анализа (см. [6]), в ряде моментов также выглядят некорректными. Так, совершенно неприемлемым, с нашей точки зрения, оказывается понятие «непрерывной» функции. Как показало дальнейшее развитие математического анализа (см. [7]), такое понятие оказывается внутренне противоречивым. Однако анализ аргументации Даламбера показывает, что суть его возражений сводилась к следующему — функция, задающая начальную форму струны, не должна иметь точек, в которых вторая производная терпит разрыв первого рода; вторая производная начальной функции, по его мнению, «не должна делать скачков». А так как о разрывах второго рода математики в ту пору не подозревали, то класс таких функций можно отождествлять либо с классом функций дважды дифференцируемых, либо с классом функций дважды непрерывно дифференцируемых. Таким образом, если отбросить излишнее (и, в сущности, некорректное) требование «непрерывности» начальной функции, от которого — см. ниже — Даламбер сам впоследствии отказался, то можно сказать, что Даламбер вел речь о классическом решении уравнения колебания струны и его позиция абсолютно оправдана [8, с. 358]: «Во всех других случаях проблема не может быть разрешена, по крайней мере, моим методом, и я не знаю также, не превосходит ли она силы известного анализа». Слова эти абсолютно справедливы — предложенная Эйлером конструкция, которая дает, по существу, «обобщенное решение», превосходила возможности анализа XVIII в. Ее реализация была делом далекого будущего.

3. В этом споре приняли участие крупнейшие математики XVIII века: Д. Бернулли, Ж. Лагранж, П. С. Лаплас, Г. Монж. Д. Бернулли внес в него еще один мотив: проблему представимости функции тригонометрическим рядом — вопрос, который мы не будем затрагивать в настоящей статье, отсылая читателя к специальной литературе (например, к [9]). Мы же сосредоточимся на том аспекте спора, который касается понятия решения дифференциального уравнения с частными производными и гладкости входящих в решение произвольных функций.

И Ж. Лагранж, и П. С. Лаплас хорошо поняли сущность и основательность критики Ж. Даламбера. Но, одновременно, они оценили и значимость прозрений Л. Эйлера: его подход открывал для математиков значительные перспективы. Поэтому их усилия были направлены на «спасение» эйлеровской конструкции, на придание ей приемлемого обоснования (см. [5]). Для этого они попытались получить формулу Даламбера иным способом, а не как результат интегрирования уравнения колебания струны.

Так Лагранж в работе [10], 1759 года, заменяет закрепленную на концах струну нитью, нагруженной $n-1$ равными массами, разделяющими нить на n равных частей, и рассматривает задачу малых колебаний такой системы, приводящую к решению системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Интегрируя ее, он получает уравнения колебания для каждого из составляющих систему грузиков. Струну Лагранж рассматривает как предел такой системы при $n\to\infty$ и стремлении к нулю массы каждого из грузиков так, чтобы суммарная их масса стремилась к конечному пределу — массе струны. В результате перехода к пределу, совершенного при полном отсутствии какой-либо строгости, Лагранж получает, как он полагает, без всякого применения анализа формулу Даламбера[3]: «И это построение, очевидно, то же самое, которое господин Эйлер изобрел для этой же гипотезы. Вот, следовательно, теория этого великого Геометра, поставленная вне всяких посягательств и установленная на принципах прямых и ясных, которые не основываются каким-либо образом на законе непрерывности, на котором настаивает господин Даламбер» (цитирую по [5, с. 169–170]).

На некорректно проведенный Лагранжем переход к пределу обратили его внимание Д. Бернулли и сам Даламбер. Тогда, в работе [11], Лагранж предложил другой метод, не требовавший такого предельного перехода. Как он писал в начале этого трактата [11], «я подумал, что нужно найти другой, более простой метод, который поможет избежать всех затруднений, встречающихся при преобразовании формул» (цит. по [5, с. 170]). Предложенный им метод (о нем см. [5]) позволил ему прийти к заключению, что для справедливости формулы Даламбера достаточно предположить бесконечную дифференцируемость функции, задающей начальную форму струны. Что особенно существенно для нас, на пути реализации нового метода (кстати, столь же нестрогого, как и предшествующий) Лагранж применил процедуру, похожую на ту, с помощью которой в XX веке начали определять обобщенное решение — процедуру домножения уравнения на финитную функцию и рассмотрения получающегося в итоге интегрального тождества (см. [5]).

Попытку легитимизировать конструкцию Эйлера предпринял и П. С. Лаплас [12]. Для этого он несколько изменил саму математическую модель задачи — в уравнении колебания струны вместо второй производной по пространственной переменной он написал соответствующее конечно-разностное выражение (см. [5]). В итоге он пришел к следующему заключению — начальная функция должна быть непрерывно дифференцируемой. В заключение своих размышлений, Лаплас писал: «Когда в проблеме колеблющейся струны начальная задача такова, что две ее прилежащие стороны образуют конечный угол, например, когда она образована объединением двух прямых линий, то, как мне кажется, геометрически предшествующее решение не может быть использовано (то есть в этом случае конструкция Эйлера нелегитимна — *С. Д.*). Но если мы рассматриваем эту проблему и все подобные ей *физически* (курсив мой — *С. Д.*), то мне кажется возможным применение данной нами конструкции также для случая, когда струна образована системой многих прямых линий. Действительно, априори очевидно, что ее движение должно очень мало отличаться от движения, происходящего в предположении, что в точках, где эти прямые встречаются, имеются маленькие кривые (закругления — *С. Д.*), которые позволяют использовать эту конструкцию». То есть, по существу, вместо рассматриваемой задачи Лаплас предлагает решать задачу со сглаженными начальными условиями (в окрестности точек, где имеются нарушения гладкости, он сглаживает функции, вводя маленькие закругления), для которой применимость рассуждений Даламбера сомнений не вызывает (заметим, что ни Лагранж, ни Лаплас не требуют «непрерывности» начальной функции!). Тогда решение задачи с «плохой» начальной функцией можно рассматривать как предел последовательности решений таких задач со сглаженными начальными функциями — то есть Лаплас, по существу, намечает один из путей введения обобщенных решений дифференциальных уравнений с частными производными (см. [5]).

В своих попытках спасти эйлеровскую конструкцию и Лагранж, и Лаплас, по существу, намечают пути, на которых в XX веке было введено понятие обобщенного решения уравнений с частными производными: через интегральные тождества (Лагранж) или как предел последовательности классических решений (Лаплас).

4. Размышляя над этими вопросами на протяжении всей своей жизни, Даламбер проявил разумную гибкость — он не стал настаивать на «непрерывности» функции, задающей начальную форму струны, и в последних своих работах пришел к заключению, что эта функция может быть «разрывной», но должна быть дважды непрерывно дифференцируемой (см. [13]).

Если с позицией Даламбера все ясно — размышляя над природой произвольных функций, входящих в решения уравнений с частными производными, он постепенно вырабатывал представление о классическом решении таких уравнений, то непонятной представляется позиция Эйлера. Так в работе [3], представленной в 1772 году (опубликована в 1773 году), то есть более чем через 20 лет после начала спора, отвечая на критику Даламбера, Эйлер продолжал утверждать, например, что функция

$$y = \varphi(v) = \sqrt[3]{a(a-v)^2},$$

где $v=ct+x$, удовлетворяет (sic!) уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

хотя $y = \sqrt[3]{a(a-v)^2}$ имеет при $v=a$ заострение. Это указывает, с моей сегодняшней точки зрения, вовсе не «на непонимание (или на нежелание понять) сущности выдвигаемых Даламбером возражений», как я соизволил выразиться в своей работе [5, с. 178] 1976 года, а на желание заявить о совершенно новом взгляде на понятие решения — обобщенного, в нынешнем понимании, решения уравнения. Не мог крупнейший математик своего времени не понимать того, что понимали Даламбер, Лагранж и Лаплас, не обладал он и упрямством, нежеланием признавать чужое мнение, тем более, что со мнением Даламбера и Лагранжа он очень считался.

5. Что же мешало самому Эйлеру (а также его выдающимся современникам, таким как Лагранж и Лаплас) выработать для нового понятия адекватное представление, например, то, которое было предложено в XX веке, — обобщенное решение? Одним из препятствий для этого послужила слабая разработка анализа — не зря же для выработки приемлемой концепции обобщенного решения потребовалось добрых полторы сотни лет интенсивного развития математики. Но

главным препятствием стали царившая тогда в математике идеология и полная неразработанность оснований анализа.

Тогдашний взгляд на математику замечательным образом передает классическое определение ее предмета, данное в 1877 году Ф. Энгельсом[4]: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал» [14, с. 33]. Евклидово пространство геометрии — суть выражение свойств окружающего нас реального физического пространства, в котором развиваются все события как естественной, так и социальной истории [15]. Отсюда и неразличимость, в глазах геометра XVIII века, физической и математической модели явления. В сознании математика они сливались воедино, и по ходу обсуждения вопросов, связанных с процессом колебания струны, все участники спора без всяких оговорок прибегали к аргументам как физического, так и математического порядка. Почему нет? Ведь речь, по сути, шла об одном и том же: реальная колеблющаяся струна и та функция, которая ее изображает в каждый момент времени, в сознании геометра той эпохи суть одно и то же! Поэтому не ставился вопрос о замене математической модели процесса другой, более адекватной физической реальности, как это сделал позднее Э. Б. Кристоффель, заменивший в своих лекциях, опубликованных в 1877 г. (см. [5, с. 180]), уравнение с частными производными второго порядка соответствующим интегральным уравнением.

Что касается обобщения самого понятия решения, то здесь возникла ситуация, существенно отличная от привычной нам. Мы можем говорить о разных понятиях решения — о решении классическом и о решении обобщенном. Для математика XVIII в. такой подход неприемлем: у задачи есть только одно решение! На это ему указывает ее физическая природа, которую он не отделяет от ее математического выражения. И это решение в рассматриваемом случае задается формулой Даламбера, сохраняющей смысл и в том случае, когда начальная функция «разрывна». Судя по всему, Эйлер обобщал понятие решения аналогично тому, как он делал это в «Дифференциальном исчислении» (1755), вводя обобщение на случай расходящихся рядов понятия суммы ряда: «...припишем слову “сумма” значение, отличное от обычного. А именно, мы скажем, что *сумма* некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд». «При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова “сумма” совпадает с обычным... Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и, в то же время, защититься от всяческих обвинений» [16, с. 101] (см. [17]). Так и в случае, когда функция, задающая начальную форму струны, обладает особенностями — точками, в которых терпит разрыв первая производная, — и функция, задаваемая формулой Даламбера, уже не может быть подставленной в уравнение колебания струны, то есть не является решением в обычном смысле слова, Эйлер приписывал слову «решение» значение, отличное от обычного, и принимал эту функцию в качестве решения. Таким образом, по мысли Эйлера, если тем или иным методом (например, введением характеристических координат) получено решение уравнения с частными производными для некоторой физической задачи, то есть решение, удовлетворяющее некоторым начальным и граничным условиям, то естественно продолжать считать его решением и в тех случаях, когда функции, задающие эти начальные и граничные условия, не обладают гладкостью, необходимой для подстановки таких решений в уравнение. Перефразируя приведенные слова Эйлера, можно сказать, что, приняв такое определение, можно сохранить выгоды использования введенного таким образом обобщения понятия решения.

Разумеется, развить приемлемую теорию таких решений во времена Эйлера не представлялось возможным, хотя выгоды от их применения им отчетливо угадывались, и его потрясающая интуиция указывала на перспективность такого обобщения. К тому же, методологические взгляды Эйлера, представление о которых дают нам его «Письма к немецкой принцессе» [18], позволяли ему делать подобные обобщения. В тех случаях, когда решение вопроса подсказывали ему его интуиция и здравый смысл, Эйлер принимал это решение даже в тех случаях, когда из него вытекали следствия, приводившие, казалось бы, к формальному противоречию, дабы избежать ситуации, когда «человеческий разум, желая избежать какого-либо противоречия... приходит к еще более нелепым воззрениям» [18, с. 42].

Оценивая знаменитый спор о колеблющейся струне с высоты математики начала XXI века, мы должны констатировать, что обе стороны в этом противостоянии были по-своему правы. Даламбер отстаивал принципы, которые привели его, к концу жизни, к выработке ясного представления о природе произвольных функций в *классическом* решении уравнения колебания струны. Его позиция замечательным образом вписалась в тот вираж, который привел к осуществленной О. Коши реформе математического анализа на базе теории пределов (в подготовке этой реформы самому Даламберу принадлежит выдающаяся роль). Эйлер же сумел заглянуть в далекое будущее — в математический анализ XX века — и, тем самым, определить один из векторов его развития в далекой перспективе.

И еще одно обстоятельство, на которое стоит обратить внимание в связи с историей знаменитой дискуссии: ведь мы, находясь на высотах XX века, казалось бы, имеем все основания сказать, что никакого предмета для спора Даламбера с Эйлером попросту не было. По существу, они толковали о разном, один — о классическом, другой — об обобщенном решении. Но понять это в тогдашнем историческом контексте были не в состоянии даже они — величайшие умы своего времени. Потребовалось полторы сотни лет развития математического знания, интенсивных исследований в области математического анализа вообще и теории дифференциальных уравнений с частными производными в частности, чтобы прийти к этой (как может показаться сегодня) столь простой мысли.

Примечания:

[1] Об этой работе Даламбера и реакции на нее современников см. [5], [19], [20].

[2] Для простоты здесь и далее мы будем считать начальную скорость всех точек струны равной нулю.

[3] Здесь мы сталкиваемся с проявлением той же методологии, которая проявилась в его попытках обоснования анализа: изобрести кунштюк, с помощью которого можно достичь требуемого результата, минуя сомнительные операции анализа. В одном случае он попытался определить производные из разложения функций в ряд Тейлора, в другом — получить формулы Даламбера, не интегрируя уравнение колебания струны.

[4] Конечно, в 70-е годы XIX века — в период, когда Ф. Энгельс его предложил, — это определение уже не отражало существа происходивших в математике того времени перемен: появились структуры, связь которых с «пространственными формами и количественными отношениями» действительного мира оказалась настолько трудноразличимой, что видеть в анализе последних существо математического знания стало чрезвычайно за-

труднительным, если, конечно, не прибегать к очень расширительному толкованию понятий «пространственная форма» и «количественное отношение». На это указал в своей классической работе «Математика» А. Н. Колмогоров [15]. Но если отнести определение Ф. Энгельса к математике XVIII и даже начала XIX века, то оно вполне адекватным образом выражает понимание предмета математики ее творцами, жившими и работавшими в этот период. Можно утверждать, что так смотрели на математику все упомянутые нами участники дискуссии о колебании струны.

Литература:

1. *D'Alembert J.* Recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration // HASBL Berlin. Année 1747. Vol. 3. Berlin, 1749. P. 214–219.

2. *Euler L.* Sur la vibration des cordes // HASBL Berlin. Année 1748. Berlin, 1750. Vol. 4. P. 69–85. (= LEOO II, 10. P. 63–77.) .

3. *Euler L.* De chordis vibrantibus disquisitio ulterior // N. Comm. (1772). 1773. Vol. 17. P 381–409. (= LEOO II, 11 (2/1). P. 62–80.).

4. *D'Alembert J.* Recherches sur les vibrations des cordes sonores // Opuscules mathématiques. T. 1. Paris. 1761.

5. *Демидов С. С.* О понятии решения дифференциальных уравнений с частными производными в споре о колебании струны в XVIII веке // ИМИ. М.: Наука, 1976. Вып. 21. С. 158–182.

6. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А. П. Юшкевича. Т. 3. М.: Наука, 1972.

7. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций // Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. М.: Наука, 1981. С. 115–255.

8. *D'Alembert J.* Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration//HASBL Berlin. Année 1750. Berlin, 1752. Vol. 6. P. 355–360.

9. *Паплаускас А. Б.* Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. М.: Наука, 1966.

10. *Lagrange J. L.* Recherches sur la nature et la propagation du son // Miscellanea Taurinensia. T. 1. 1759. P. 1–112. (= Oeuvres. T. 1. Paris. 1867. P. 39–148.).

11. *Lagrange J. L.* Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son // Miscellanea Taurinensia. T. 2. 1760–1761. (= Oeuvres. T. 1. Paris. 1867. P. 151–318.)

12. *Laplace P. S.* Mémoire sur les suites // Histoire de l'Acad. des Sci. de Paris. 1779 (82). P. 207–309. (= Oeuvres. T. 10. P. 1–89.)

13. *Юшкевич А. П.* К истории спора о колеблющейся струне (Даламбер о применении «разрывных» функций) // ИМИ. М.: Наука. 1975. Вып. 20. С. 221–231.

14. *Энгельс Ф.* Анти-Дюринг. М.: 1970.

15. *Колмогоров А. Н.* Математика // Большая Советская Энциклопедия. Изд. 2-е. Т. 26. С. 464–483.

16. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление / Перевод и статья М. Я. Выгодского. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.

17. *Петрова С. С.* Леонард Эйлер и расходящиеся ряды // Леонард Эйлер и современная наука. Материалы Международной научной конференции. 14–17 мая 2007 г. Санкт-Петербург. СПб., 2007. С. 179.

18. *Эйлер Л.* Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях. СПб.: Наука, 2002.

19. *Демидов С. С.* Дифференциальные уравнения с частными производными в работах Ж. Даламбера // ИМИ. М.: Наука, 1974. Вып. 19. С. 94–124.

20. *Demidov S. S.* Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de d'Alembert // Revue d'Histoire des Sciences. 1982. T. 35. № 1. P. 3–42.

Jean-Paul Pier
Luxembourg

Leonhard Euler and the Emergence of Harmonic Analysis

Аннотация: Так называемые формулы Эйлера–Фурье были впервые получены Леонардом Эйлером в ходе изучения проблемы колебания струны, уже решенной Даламбером. Эйлер интересовался, на какой класс функций может быть распространен его метод. Очевидно, Фурье не знал о результатах, полученных Эйлером, но он стал систематически исследовать уравнение теплопроводности и, в более общем плане, — возможности его распространения на более широкие классы функций. Впоследствии классический анализ Фурье привел к абстрактному гармоническому анализу через рассмотрение групп.

Nowadays the object of classical Harmonic Analysis is the decomposition and the recomposition of a function *f* with periodicity 2π.

In case *f* is real-valued,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx, \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx.$$

The complex version reads

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}, \tag{3}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}dx, \tag{4}$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n),\ c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n),$$

$$n=0,\ 1,\ \ldots,\ b_0=0.$$

Important motivations concern the study of partial differential equations, in particular the vibrating string equation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

with initial conditions.

In a paper [1] written in 1777, but published only after his death in 1798, Euler studies:

$$\Phi = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + \ldots$$

If the number *i* differs from 0,

$$\int_0^\pi d\varphi \cos i\varphi = \left[\frac{1}{i}\sin i\varphi\right]_0^\pi = 0,$$

but $\int_0^\pi d\varphi = \pi,$

$$A\pi = \int_0^\pi \Phi d\varphi,\ A = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi d\varphi.$$

The following formula was well known

$$\cos i\varphi \cos\lambda\varphi = \frac{1}{2}(\cos(i-\lambda)\varphi + \cos(i+\lambda)\varphi).$$

If $i \neq \lambda$,

$$\int_0^\pi d\varphi \cos i\phi \cos\lambda\phi = \left[\frac{\sin(i-\lambda)\varphi}{2(i-\lambda)} + \frac{\sin(i+\lambda)\varphi}{2(i+\lambda)}\right]_0^\pi = 0.$$

If $i \neq 0$,

$$\int_0^\pi d\varphi \cos^2 i\varphi = \int_0^\pi d\varphi \frac{1+\cos 2i\varphi}{2} = \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4i}\sin 2i\varphi\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Hence

$$\int_0^\pi \Phi d\varphi \cos\varphi = \frac{1}{2}\pi B,$$

$$B = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Phi d\varphi \cos\varphi.$$

Similarly

$$C = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Phi d\varphi \cos 2\varphi,\ D = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Phi d\varphi \cos 3\varphi,$$

$E = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Phi d\varphi \cos 4\varphi,$ *etc.*

Actually Euler may be credited having obtained the formula

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{k\pi x}{l}).$$

with respect to coefficients

$$a_k = 2l\int_0^l f(s)\cos\frac{k\pi s}{l}ds,$$

by making use of the modern orthogonalization and normalization procedures.

Carl Boehm, editor of the 1798 Euler opus, comments:

> *"In hac dissertatione Eulerus primum in illam celeberrimam coëfficientium formam incumbit, quae illustrissimi viri J. S. Fourier nomine designari solet"* ([1, p. 333].

Simon-Denis Poisson referring to the volume IV of Euler's integral calculus will write in 1813:

> *"These formulas are due to Euler who found them by some kind of induction based upon the passage from real to complex quantities; an induction that one may utilize as a means for discovery, but the results of which have to be confirmed by direct and rigorous methods"* [2, p. 219].

Euler had begun his consideration of string motions in 1748 ([3], [4]).

Referring to Daniel Bernoulli's work [5], Euler states firmly:

> *"Mr. Bernoulli deduces all his excellent reflexions only for the results performed by the late Mr. Taylor on the string motions and partains against Mr. d'Alembert and myself that Taylor's solution suffices in order to explain all motions that a string may accomplish"* [6, p. 233].

Joseph Louis Lagrange begins his investigation by assuming that a string carries a finite number of masses, equidistantly displayed. Passing to the limit he recollects results due to Euler. He writes:

> *"This is the way to save and to establish the theory of this great Geometer on direct and clear principles, free of the continuity requirements of Mr d'Alembert. This is also a way by which the same formula, used to support and demonstrate the theory of Mr Bernoulli on the mixing of isochronous vibrations when the number of bodies is finite, proves that this theory is inadequate in the case of infintely many bodies... It is really a pity that such an ingenious theory, which could be hoped to apply in other obscure and important matters, is just disproved in the principal case to which are referred all small reciprocal motions occurring in nature"* [7, p. 107].

Euler approves of course as he is satisfied to notice that discontinuous functions have to be considered in Analysis:

> *"Mr. de la Grange having plainly justified my solution, and by an unopposable way, I am not doubtful at all that one will shortly recognize the necessity of discontinuous functions in Analysis, especially when one will see that it is the only possibility to explain the propagation of sounds"* [8, p. 187–188; p. 428].

A partial solution of the string problem was provided by Jean Le Rond d'Alembert in 1768. But he speaks about the

> *"clever solution of the vibrating strings problems, provided by M. de la Grange, in the first volume of the Memoirs of the Turin Academy of Sciences; solution for which this great geometer claimed to prove, in opposition to myself, that the problem could always be solved, whatever the initial configuration of the string may be"* [9, p. 128].

Fourier found the "Fourier series" of the so-called sawtooth function and the triangular wave.

In a remarkable recent monograph about the evolution of Applied Harmonic Analysis, Elena Prestini observes that with respect to Bernoulli's article [5]:

> *"Euler had stated that functions of this kind were impossible to represent by trigonometric series. Fourier did not mention Euler at this junction. Rather*

> *he commented that these results fully confirm Daniel Bernoulli's opinion"* [10, p. 41].

Prestini goes on saying:

> *"Fourier who was reported to have learnt of it later, as indicated by Lacroix, did not let go without comment the charge of his having failed to refer to earlier works on the subject. For, in a letter, he wrote: I am sorry not to have known the mathematician who first made use of this method because I would have cited him. Regarding the researches of d'Alembert and Euler could one not add that if they knew this expansion they made but a very imperfect use of it"* [10, p. 42].

Here is Joseph Fourier's statement in his famous book on heat theory:

> *"Whatever the function* φx*, or the form of the curve representing it, may be, the integral admits a determined value that may be introduced into the calculation. The values of these defined integrals are analogous to the total area* $\int \varphi x dx$*, lying between the curve and a given interval, or to mechanics qualities, such as the ordinates of the barycenter of the area or an arbitrary body. Obviously all quantities have values that may be assigned to them, the figures of the bodies may they be regular, or may one give them a totally arbitrary form"* [11].

Arnold Sachse had argued in a historical study dated 1880:

> *"Fourier's merit, in our opinion, is not lying in the discovery of a general method for the determination of coefficients, but more in the remark, he was first to formulate, that a trigonometric series, for which the coefficients are determined by definite integrals, may represent a totally arbitrary function"* [12, p. 46–47].

According to Henri Lebesgue, in his treatise *Leçons sur l'intégration* of 1904, the formula for a_0 was known by d'Alembert in 1754, and the expression of a_n was known by Clairaut in 1757. By Lebesgue's times one was speaking about the Euler and Fourier formulas.

In the elaborated history reporting mathematical thought from ancient to modern times Morris Kline writes:

> *"Euler, d'Alembert, Lagrange never abandoned the position that arbitrary functions could not be represented by trigonometric series. The paradox is partially explained by the fact that the trigonometric series were assumed to hold where other evidence, in some cases physical, seemed to assure this fact"* [13, p. 459].

Coming now to contemporary statements by harmonic analysts we quote Jean-Pierre Kahane and Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset:

> *"Daniel Bernoulli had the idea of expressing the solutions of the problem of vibrating strings with the help of trigonometric series — that is, to express the motion of the string as the superposition of motions corresponding to pure harmonics. Euler applied the formulas (4) in particular cases. But, as Riemann observes, Fourier was the first to consider (3) and (4) as a whole: you analyse f through the Fourier formulas (4), you synthesize f through its Fourier series in (3). Analysis and synthesis are the two complementary aspects of what is now called harmonic analysis"* [14, p. 1–2].

The Fourier series is just one part of a large subject.

George W. Mackey, the late senior harmonic analyst, draws a broad picture ([15], [16]):

> *"The importance of Fourier's treatise of course does not lie in its applications to solving problems in heat flow, but to the universality of the methods he employed"* [16, p. 25].

> *"The chief difference between Fourier's application of this principle and the earlier applications in probability and number theory lie in the fact that Fourier was dealing with a continuous group"* [16, p. 26]:
> Instead of

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

one has

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y)e^{ixy}dx,$$

$$c(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx!!!$$

References:

1. *Euler L.* Desquisitio ulterior super seriebus secundum multiplia cuiusdam anguli progrendientibus // N. Acta. T. 11. P. 114–132. (1793) 1798. (= LEOO I, 16/1. P. 333–355.)

2. *Poisson S.-D.* Mémoire sur les intégrales définies (I) // J. École polytechnique. 1813. Vol. XVI. P. 215–262.

3. *Euler L.* Sur la vibration des cordes // MAS Berlin. Vol. 140. 1748. (= LEOO II, 10. P. 63–77.)

4. *Euler L.* Sur le mouvement d'une corde qui au commencement n'a été ébranlée que dans une partie // MAS Berlin. (1765) 1767. P. 307–334.

5. *Bernoulli D.* Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes // MAS Berlin. 1753. Vol. 15.

6. *Euler L.* Remarques su les mémoires précédens de M. Bernoulli // MAS Berlin (1753). 1755. P. 196–222. (= LEOO II, 10. P. 233–254.)

7. *Lagrange J.-L.* Recherches sur la nature et la propagation du son // Miscellanea Taurinensis. I. 1759.

8. *Euler L.* De la propagation du son // MAS Berlin (1759). 1766. Vol. 66. P. 185–209. (= LEOO III, 1. P. 428–461.)

9. *D'Alembert J.* Nouvelles réflexions sur les vibrations des cordes sonores // Opuscules mathématiques. Vol. 4. Mém. 35. Paris: Briasson, 1768. P. 128–224.

10. *Prestini E.* The evolution of applied Harmonic Analysis. Boston: Birkhäuser, 2004.

11. *Fourier J.-B.* Théorie analytique de la chaleur. Paris: Didot, 1822. (Reprint: Paris: Gabay, 1988.)

12. *Sachse A.* Essai historique sur la représentation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une série trigonométrique // Bull. sc. math. 1880. Vol. 4. P. 43–64, 83–112.

13. *Kline M.* Mathematical thought from Ancient to Modern Times. Vol. II. Oxford University Press, 1972.

14. *Kahane J.-P., Lemarié-Rieusset P.-G.* Fourier series and wavelets. Gordon and Breach Overseas Publ., 1995.

15. *Mackey G.* Harmonic Analysis as the Exploitation of Symmetry: A historical survey // Rice University Studies. Vol. 64. P. 73–28.

16. *Mackey G.* The Scope and History of Commutative and Noncommutative Harmonic Analysis // History of Mathematics. 5. American Mathematical Society, 1992. P. 1–157.

17. *Weil A.* Number theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre. Boston: Birkhäuser, 1984.

Following Appendix I, p. 287–291 of [17],

A prime p, assumed to be odd and not a divisor of N, is in Euler's sense, a prime divisor of the form X^2+NY^2 if it divides some integer a^2+Nb^2 with a prime to Nb (p. 287).

(This description is claimed by Weil to be in the form best suited for comparison with Euler's empirical results.)

Without restricting the generality we shall assume that N is squarefree and neither -1 nor 0; $d=-N$ or $-4N$ according as $N=-1(\text{mod}4)$ or not, $D=|d|$.

Consider a function ω on Z endowed with 6 properties:

(i) $\omega(n)=\pm 1$ if n is prime to D; otherwise $\omega(n)=0$

(ii) $\omega(n)=\omega(n+D)$ for all n

(iii) $\omega(mn)=\omega(m)\omega(n)$ for all m, n

(So a Dirichlet character modulo D is supposed to be defined)

In particular $\omega(n^2)=1$ for every n prime to D

(iv) $\omega=-1$ or $+1$ according as $N<0$ or >0

(v) There exists a divisor D' of D other than D such that $\omega(m)=\omega(n)$ for all m, n prime to D and $m=n(\text{mod } D')$

(vi) An odd prime p is a positive divisor of X^2+NY^2 if $\omega(p)=1$.

With a bit of optimistic spirit Weil may claim that the described situation constitutes a prehistoric example of a group representation, a major topic in General Harmonic Analysis.

Э. М. Добровольская
Киев, Украина

Исследования по непрерывным дробям в трудах Л. Эйлера

Abstract: The article contains a historical-scientific analysis of the valuable contribution made by Leonard Euler to the theory of continued fractions.

Теория цепных дробей является одним из важных направлений развития теории чисел, алгебры и математического анализа. Эта математическая структура своими истоками уходит в далекую древность. Заметное развитие понятия цепной дроби наблюдалось в средние века. Изучение этого понятия в теоретическом плане тесно переплетается с его практическими применениями. Особого расцвета эта теория и многие ее применения к различным отраслям математики достигл в XVIII веке, когда цепная дробь оформилась как самостоятельная математическая структура.

Значение исследований по истории цепных дробей определяется той важной ролью, которую эти дроби играли в процессе становления и развития ряда фундаментальных направлений математической науки, а именно: приближенных вычислений иррациональных величин, решения неопределенных уравнений, проблемы квадратуры круга, задач теории чисел и алгебры, интегрального исчисления, интегрирования дифференциальных уравнений, аппроксимации функций и других.

История цепных дробей уходит своими истоками к работам Евклида, Архимеда, индийских математиков. Запросы практики, связанные с приближенными вычислениями, послужили основным стимулом для возникновения новой алгебраической структуры — цепных, или как они иначе назывались, непрерывных дробей. В разные исторические времена и в самых различных местах до XVII в. изучение и применение непрерывных дробей носило эпизодический характер, а вопрос о создании теории тогда и не ставился. Однако уже в XVII в., а особенно в XVIII в. исследования по теории непрерывных дробей стали занимать все больше места в работе ученых. Они стали предметом исследований трех выдающихся математиков той эпохи — Л. Эйлера (1707–1783), И. Ламберта (1728–1777) и Ж. Лагранжа (1736–1813).

Зарождение основ теории непрерывных дробей, когда внимание ученых постепенно переключается с прямого использования непрерывных дробей для облегчения практического счета на исследование этого понятия, относится ко второй половине XVII в. При этом эпицентром таких исследований стал Англия. Впервые основы теории непрерывных дробей изложены в работах Дж. Валлиса (1616–1703) и У. Броункера (1620–1684).

Здесь речь идет об интерпретации, данной Валлисом для дроби, указанной Броункером, а также о методе Валлиса преобразования цепной дроби в обыкновенную. В схеме, предложенной Валлисом, впервые было установлено в общем виде соотношение между числителями и знаменателями трех соседних подходящих дробей для любой непрерывной дроби. Он рассмотрел также вопрос об улучшении условий ускорения сходимости подходящих дробей. Валлис же был первым автором, который впервые использовал термин «непрерывные дроби». Термин «цепная дробь» в нашем смысле появится лишь в конце XVIII века.

После того как была признана модель солнечной системы Н. Коперника и открыты законы движения планет И. Кеплера, естественно появилась идея построить модель, дающую наглядное представление о нашей планетной системе. Были построены известные модели солнечной системы, где, по возможности, сохранялись относительные размеры и положение орбит планет. К этому иногда добавлялся механизм, обеспечивавший движение планет вокруг центра, изображавшего Солнце. Широкой общественности мало известно, что один из наиболее удачных планетариев был построен в свое время голландским ученым Х. Гюйгенсом (1629–1695). Он был создателем новой теории и весьма успешно использовал непрерывные дроби для расчетов при конструировании «планетной машины» — как ранее называли планетарий. Теоретически он решил, опираясь на понятие цепной дроби, ранее упоминавшуюся задачу о выражении с большой степенью точности дробей с большими числителем и знаменателем через дроби с меньшими числителем и знаменателем. При этом им была обоснована эффективность его метода и показано, что при помощи непрерывной дроби можно получить лучшее приближение, чем при любом другом известном подходе.

На развитие учения о непрерывных дробях в XVII – начале XVIII вв. стимулирующую роль оказала «Арифметика» Диофанта (III в. н. э.). Здесь же следует упомянуть вклад английских математиков Н. Саундерсона (1682–1739) и Р. Котеса (1680–1716) в развитие этого учения, в пополнение общей теории, в частности, в исследование точности приближений. Таким образом, к началу XVIII века складывались благоприятные предпосылки для дальнейшего развития теории непрерывных дробей.

Качественно новый прогресс в построении теории непрерывных дробей наблюдается с конца 30-х годов XVIII в. Большой вклад в развитие учения принадлежит Л. Эйлеру. Наиболее продуктивными периодами для разработки теории непрерывных дробей у Эйлера были 50-е и 70-е годы XVIII века.

Уже в двух первых работах 1737 и 1739 гг. ([1], [2]) Эйлер практически подвел итог исследованиям своих предшественников, систематизировал и обобщил некоторые результаты, а также дал существенные дополнения. В этих работах Эйлер обращал внимание на то, что к тому времени в математике уже использовались две структуры, связанные с бесконечными выражениями. Имелись в виду ряды и бесконечные произведения. Теперь появляется третий вид бесконечных выражений — непрерывные дроби. Это был новый подход к понятию непрерывной дроби. В главе XVIII известной книги Эйлера «Введение в анализ бесконечно малых» (1748) дано подробное изложение теории непрерывных дробей, в основу которого положены две его ранние работы. С выходом этой книги теория непрерывных дробей стала широко известной в среде математиков. После определения непрерывной дроби Эйлер вывел основные соотношения, связывающие числители и знаменатели трех соседних подходящих дробей, разобрал механизм построения подходящих дробей. Он также подробно изучал преобразование любого знакочередующегося ряда в непрерывную дробь, выводя соотношение для связи элементов дроби и членов ряда. В процессе этого были получены разложения в цепные дроби известных величин: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{e-1}$, $\sqrt{2}$ и др. При этом доказывалось, что цепными дробями можно получить лучшие приближения для данных иррациональных величин, чем при других известных способах. В следующих работах (конца 60-х гг.) Эйлер использовал цепные дроби для представления величины π с помощью рациональных дробей и, далее, изучал вопрос о построении «особого», как он отмечал, алгоритма, относящегося к правилу построения подходящих дробей. Эта теория интересовала Эйлера и в последующие десятилетия, когда он продолжал разработку уже намеченных ранее тем, а также занялся разбором многих важных вопросов, связанных с приложением непрерывных дробей. В связи с этим, Эйлер занимался разбором методов суммирования цепных дробей, исследованием их отдельных видов, преобразованиями в ряды. Он разобрал суммирование непрерывной дроби вида

$$S = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \dots}}\ ,$$

слагаемые которой числа a, b, c... образуют арифметическую прогрессию. Задача сводится, затем, к суммированию некоторых рядов, а полученный результат используется для интегрирования дифференциальных уравнений. Особенности суммирования цепных дробей общего вида, числители и знаменатели которых имели определенную форму, рассмотрены Эйлером в более поздней работе [3], где приведены три способа решения задачи. Так, автор изучает цепную дробь вида

$$S = \cfrac{n}{1 + \cfrac{n+1}{2 + \cfrac{n+2}{3 + \dots}}},$$

и при определенных значениях n эта дробь представляет некоторые известные величины, например, при $n=1$ получим $S = \frac{1}{e-1}$. Эта тематика рассматривалась Эйлером в других работах ([4], [5]), где он получил весьма интересные по своей структуре новые виды цепных дробей, а также разобрал как прямую задачу о преобразовании непрерывной дроби в сходящийся ряд, так и обратную ей — о преобразовании рядов некоторого вида в цепные дроби. Полученные результаты использованы для разложения интегралов от некоторых функций. В результате, получились конкретные виды цепных дробей для разложений функций и величин: $\operatorname{arctg} x$, $\frac{1}{e}$, $\frac{e-1}{e}$ и др. Здесь же речь шла и об интегрировании дифференциального уравнения вида $\frac{dv}{dz}(1+z^n) + kvz^{n-1} - z^{m-1} = 0$, когда применяется замена $\frac{z^m}{m} = v$, а v представляется знакопеременным рядом

$$v = Az^m - Bz^{m+n} + Cz^{m+2n} - Dz^{m+3n} + \dots$$

После определения коэффициентов A, B, C с использованием интеграла $\int z^{m-1}(1+z^n)^{\frac{k}{n}-1}dz$ данный ряд может быть представлен в форме цепной дроби.

В двух других статьях ([6], [7]) Эйлер рассмотрел связь цепных дробей с бесконечными произведениями. Наряду с разбором арифметической теории непрерывных дробей, Эйлер уделял внимание их применению для решения некоторых задач из анализа. Он рассматривал связь интегралов и непрерывных дробей, изображение некоторых функций. Этим самым, по существу, закладывались основы аналитической теории непрерывных дробей. Задачи о представлении непрерывными дробями интегралов от некоторых функций решались Эйлером уже в 1739 г. Автор строит непрерывную дробь для выражения $\int\frac{dx}{1+x}$ и находит при ее помощи выражение для $ln 2$ (при x=1). Также строится непрерывная дробь для $\int\frac{dx}{1+x^2}$, $\int\frac{dx}{1+x^n}$ и т. д. при x=1 (Здесь сохранена форма записи Эйлера, имеются в виду интегралы от 0 до 1). При этом используется метод представления интеграла рядом, а ряда непрерывной дробью в общем виде, а затем для каждого случая находится соответственное значение коэффициентов. Так автор приходит к общей формуле

$$\int\frac{dx}{1+x^m}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{m+\cfrac{(m+1)^2}{m+\cfrac{(2m+1)^2}{m+\ldots}}}}$$

для различных значений m и более сложных интегралов $\int\frac{x^{n-1}}{1+x^m}dx$. Здесь же разбирался и вопрос о связи бесконечных произведений и непрерывных дробей. Как отмечал Л. Эйлер, отправной точкой его исследований были соответствующие работы Валлиса и Броункера. Поэтому неудивительно, что здесь мы находим новые подходы для разложений в цепные дроби величин $\frac{2}{\pi}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ и др.

Аналогичный вопрос обсуждался Эйлером в более поздней работе [7], где было более кратко и ясно рассмотрено преобразование интегралов в бесконечные произведения, а затем в цепные дроби. Здесь же Эйлер дал еще один вывод непрерывной дроби Броункера $\frac{4}{\pi}$.

Специальное исследование Эйлер посвятил вычислению интегралов вида $\int\frac{x^n dx}{\sqrt{a^2-2bx+cx^2}}$ и некоторых их частных случаев с помощью аппарата цепных дробей. Он замечает сначала, что если величину этого интеграла при n=0 можно обозначить буквой П, то при любом положительном n рассматриваемые интегралы могут быть выражены через П при помощи некоторых рекуррентных соотношений. Та же тематика обсуждалась также в работах Эйлера [8], [9], [10], где был получен ряд новых рекуррентных формул для новых разложений. В результате этих исследований были найдены аналитические представления многих известных функций в форме цепных дробей.

Одной из важнейших задач диофантова анализа является поиск целочисленного решения уравнения $ax^2-y^2=1$, где a не является точным квадратом. Первые результаты изучения данной проблемы с помощью цепных дробей были доложены Эйлером в 1759 и в 1763 гг. и были опубликованы в большой статье 1765 г., посвященной решению «проблемы Пелля» [11]. Здесь речь шла о решении уравнения Ферма вида $lq+1=p^2$. Для получения приближенного значения дроби $\frac{p}{q}$ Эйлер использует разложение в цепную дробь $\sqrt{l}$. Далее устанавливается связь между ее подходящими дробями и наименьшим решением данного уравнения, с помощью которого могут быть построены все остальные решения. При этом обнаруживается периодичность цепной дроби для $\sqrt{l}$, которая в 1768 г. была строго доказана Ж. Лагранжем. В следующей работе по этой теме за 1773 г. Эйлер рассмотрел решение в целых числах более общего уравнения $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, разобрав предварительно ту же задачу для уравнения $Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$. Идея решения состояла в том, что для данных чисел A, B, C нужно было подобрать такие p и q, чтобы выражение $Ap^2+2Bpq+Cq^2$ принимало наименьшее значение. Он получил формулы для определения x и y через коэффициенты A, B, C, известные решения $x=a$, $y=b$ и введенные им величины p и q.

Важную роль в развитии теории цепных дробей сыграла работа Эйлера 1785 г., где рассматривалась задача отыскания наименьших целых чисел a, b, c, при которых выражение $aA+bB+cC$, где A, B, C — данные целые числа, становилось бы равным нулю. В процессе решения этой задачи намечалось некоторое обобщение известного алгоритма цепных дробей. Эта статья послужила импульсом для известной посмертной статьи Якоби, разобравшего ту же задачу.

Первое применение теории непрерывных дробей к решению дифференциальных уравнений непосредственно связано с уравнением Риккати. Уже в первой из упоминавшихся ранее работ (1737) Эйлера по теории непрерывных дробей был изучен, среди других, вопрос о сведении задачи суммирования непрерывной дроби к интегрированию соответствующего уравнения Риккати. Эйлер показал, что значение некоторой непрерывной дроби $q(p)$ должно удовлетворять уравнению $dq+q^2dp=dp$. Этот результат был установлен с помощью отыскания дифференциального уравнения, которому формально удовлетворял бесконечный ряд, эквивалентный данной непрерывной дроби. Построение цепной дроби для решения уравнения $ncx^ndx+cy^2dx+dy=0$ для некоторых значений x Эйлер рассмотрел в конце второй из ранее упоминавшихся работ (1739). Более подробно к изучению аналогичной задачи Эйлер вернулся в работе [12]. После множества преобразований он пришел здесь к уравнению $ady+y^2dt=t^{\frac{s-2a}{a}}dt$, решение которого связано с цепной дробью довольно простой конструкции. При этом он показал, что различным случаям интегрируемости соответствует различие конечного числа первых членов соответствующих непрерывных дробей. В заключительной части работы решается обратная задача, а именно, предлагается «прямой метод» приведения интегрирования уравнения Риккати относительно неизвестной функции $z=z(t)$ к отысканию значения непрерывной дроби, элементы которой в этом случае являются функциями t. Заключительная работа Л. Эйлера по данной теме была опубликована уже в начале XIX в. Она называлась «Легкий прием решения уравнения Риккати с помощью непрерывных дробей», что хорошо характеризует ее содержание. Здесь в довольно отчетливой форме ставилась проблема единственности решения.

В заключение отметим, что непрерывные дроби были, наряду с двумя другими математическими структурами, рядами и бесконечными произведениями, третьей структурой, оперирующей с бесконечным числом элементов. Основы теории этих дробей стали закладываться в XVII в. усилиями Д. Валлиса, У. Броункера и Х. Гюйгенса, а сама теория была, в основном, разработана во второй половине XVIII в. благодаря трудам Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, И. Ламберта и их последователей.

Литература:

1. *Euler L.* De fractionibus continuis // Comm. (1737) 1744. Vol. 9. P. 98–137.
2. *Euler L.* De fractionibus continuis observationes // Comm. (1739) 1750. Vol. 11. P. 32–81.
3. *Euler L.* Observationes circa fractiones continuas in hac forma contentas $S=\cfrac{n}{1+\cfrac{n+1}{2+\cfrac{n+2}{3+\ldots}}}$ // MAS SPb (1811). 1913. Vol. 4. P. 51–74.
4. *Euler L.* Observationes analytica // Opuscula analytica. Vol. 1. 1783. P. 85–120.
5. *Euler L.* De trasformatione serierum in fractiones continuas; ubi simul haec theoria non mediocriter amplificatur // Ibid. Vol. 2. 1785. P. 138–177.
6. *Euler L.* De seriebus in quibus producta ex binis terminis contiguis datam constituunt progressionem // Ibid. Vol. 1. 1783. P. 3–47.
7. *Euler L.* De fractionibus continuis Wallisii // MAS SPb (1812). 1815. Vol. 5. P. 24–44.
8. *Euler L.* Speculationes super formula integrali $\int\frac{x^n dx}{\sqrt{aa-2bx+cxx}}$ ubi simul egregiae observationes circa fractiones continuas occurrunt // Acta. (1782). Vol. 6. 1786. P. 62–84.
9. *Euler L.* De formatione fractionum continuarum // Acta. (1779) Vol. 9. 1782. P. 3–29.
10. *Euler L.* Methodus inveniendi formulas integrales, qual certis casibus datam inter se teneant rationem, ubi simul methodus traditur fractiones continuas summandi // Opuscula analytica. Vol. 2. 1785. P. 178–216.
11. *Euler L.* De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo // N. Comm. (1765). 1767. Vol. 11. P. 28–66.
12. *Euler L.* Summatio fractionis continuae, cujus indices progressionem arithmeticam constituunt, dum numeratores omnes sunt unitates; ubi simul resolutio aequationis Riccatianae per hujusmodi fractiones docetur // Opuscula analytica. Vol. 2. 1785. P. 217–239.

А. Е. Малых
Пермь, Россия

Из комбинаторного наследия Леонарда Эйлера

Abstract: It is shown that Euler's investigations played a leading role in the progress of combinatorial analysis. Euler considered the new types of the combinatorial problems and introduced new combinatorial notions. He solved some of the questions connected with the *partition numerorum*, and created a combinatorial theory of Latin squares. Euler thus took part, directly or indirectly, in the solving and development of the most classical combinatorial problems.

В развитии комбинаторного анализа ведущую роль сыграли, как известно, исследования Эйлера. Около полутора десятка его работ посвящено решению конкретных задач, ставших теперь «классическими». В них Эйлер не стремился к созданию общих теорий, выработке собственного взгляда на центральные проблемы и основные понятия комбинаторного анализа. Это, однако, не помешало ему выдвинуть, а также развить такие идеи и методы, значение которых даже в настоящее время трудно переоценить.

В первую очередь, отметим решение Эйлером ряда теоретико-числовых задач, носящих комбинаторный характер. К ним, в частности, относится отыскание множества решений неопределенного уравнения вида $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = n$ в целых неотрицательных числах, которое сводится к представлению натурального числа n в виде суммы m слагаемых. Такое **разбиение** числа n, в свою очередь, приводит к формированию новых комбинаторных понятий: **сочетания и размещения с определенной суммой**.

Л. Ю. Диксон в [1] указал, что задача о разбиении числа на слагаемые появилась в 1669 году в письме Г. В. Лейбница к И. Бернулли. Однако анализ сочинения [2, п. 25, 26] позволяет утверждать, что Лейбниц уже в 1666 г. стал заниматься этим вопросом. Тем не менее, существенное продвижение в теории разбиений связано с исследованиями Эйлера. Толчком для его занятий этим вопросом послужило письмо Ф. Ноде, в котором были сформулированы две задачи [8, с. 310, приложение 57] об определении количества способов получения данного числа n путем сложения m неравных (k равных или неравных) между собой целых положительных чисел.

Решение этой задачи Эйлер дал в ряде мемуаров ([4], [5]), содержание которых впоследствии составило XVI главу тома I его «Введения в анализ бесконечных» [3]. В этих мемуарах, во-первых, появились новые комбинаторные понятия сочетаний и размещений с определенной суммой и, во-вторых, в комбинаторный анализ был введен **метод производящих функций**, при помощи которого комбинаторные функции были определены как коэффициенты разложений производящих функций в степенные ряды. Заметим, что до этих работ единственным комбинаторным приемом был индуктивный вывод рекуррентных соотношений, справедливость которых не всегда доказывалась методом полной математической индукции.

Для решения первой задачи Эйлер рассмотрел бесконечное произведение

$$F(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1+x^{k}z\right)$$

и приравнял его к ряду $\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x)z^k$, где

$$A_k(x)=a_{k,o}+a_{k,1}x+a_{k,2}x^2+...+a_{k,n}x^n+....$$

Таким образом,

$$F(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1+x^{k}z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x)z^k \tag{1}$$

Тогда коэффициент $a_{k,n}$ при степени x^nz^k показывает число различных способов представления n в виде суммы k натуральных слагаемых. Следовательно, $F(z)$ является производящей функцией для числа сочетаний из n элементов по k без повторений, имеющих сумму n. При нахождении C_m^k с суммой, равной n, Эйлер рассмотрел производящую функцию $F_m(z)=\prod_{1}^{m}(1+x^kz)=\sum_{k=o}^{m}A_k(x)z^k$.

Подставив далее z=1 в формулу (1), он пришел к $\prod_{1}^{\infty}\left(1+x^k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(x)$, откуда получил, что при разложении левой части в бесконечный ряд по степеням x коэффициент при x^n укажет число способов разбиения n на различные слагаемые.

При решении второй задачи, предложенной Ноде, Эйлер рассмотрел бесконечное произведение $G(x)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-x^kz\right)^{-1}$ и приравнял его к ряду $\sum_{k=o}^{\infty}B_k(x)z^k$, где

$$B_k(x)=b_{k,o}+b_{k,1}x+b_{k,2}x^2+...+b_{k,n}x^n+...,\ \prod_{1}^{\infty}\left(1-x^kz\right)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}B_k(x)z^k \tag{2}$$

Тогда коэффициент $b_{k,n}$ при x^nz^k в разложении (2) указывает число различных способов представления n в виде суммы k натуральных чисел, как равных, так и неравных между собой. Поэтому $G(x)$ — производящая функция для сочетаний из n элементов по k с определенной суммой без их повторений и с повторениями.

Эйлер рассмотрел также задачи, связанные с ограниченным повторением элементов. Полагая в (2) z = 1 и раскладывая правую часть по степеням x, он получил

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1-x^k\right)^{-1}=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+...$$

Тогда коэффициент при x^i указывает на число способов представления n в виде суммы одинаковых или различных слагаемых. Примеры таких разложений приведены в его статье.

Далее Эйлер определил функцию $B_k(x)$, подставляя в $\prod_{1}^{\infty}\left(1-x^kz\right)^{-1}$ вместо z произведение xz, и разложил обе части (2) по степеням z. Из свойств разложений (1) и (2) ученый получил ряд важных комбинаторных теорем.

Таким образом, Эйлер впервые установил соотношения между различными типами сочетаний с определенной суммой. Однако общих формул у него нет. Они были получены лишь в середине XIX века.

Эйлер первым стал интересоваться проблемой нахождения числа **перестановок с ограничениями на позиции их элементов** (или, как чаще говорят, **запрещенных**), т. е. таких, в которых не каждый элемент может стоять на любом месте. Поводом к ее изучению послужили, по-видимому, попытки составления протеевых стихов, анаграмм, а также получение перестановок слов гекзаметра с сохранением законов метрики, столь популярных в XVII–XVIII веках.

Как известно, задачи такого рода допускают интерпретацию на шахматной доске: в этом случае требуется расставить фигуры на взаимно неатакующих позициях. Особой популярностью пользовались задачи расстановок на шахматной доске ладьи, слона и коня. Эйлер, в частности, выполнил расстановку восьми ферзей. Более действенным толчком к изучению перестановок с ограниченными позициями послужило развитие теории определителей, возникшей в связи с решением системы линейных алгебраических уравнений, так как с этими перестановками связано нахождение числа членов в разложении определителя n-го порядка, среди которых содержится ровно k элементов, стоящих на главной диагонали.

Разновидностью указанной выше задачи является случай **полного смещения элементов**. Ему соответствует нахождение числа членов разложенного определителя n-го порядка, в котором все элементы, стоящие на главной диагонали, равны нулю. Истоки задачи относятся ко второй половине XVII века и связаны с проблемой, известной в настоящее время как «задача о встречах», представляющая усиленную формулировку «задачи китайских церемоний», упомянутой еще Н. Тартальей в «Общем трактате о числе и мере» [6].

Первые заметки Эйлера по этому вопросу содержатся в пятой и шестой «записных книжках» (H_5 и H_6), относящихся к берлинскому периоду его жизни (1741–1766).

Фрагменты исследования «Проблема перестановок» из H_6 впервые были опубликованы в 1923 году в дополнении к тому LEOO I, 7, где «задаче о встречах» Эйлер придал следующий вид: «Пусть числа 1, 2, ..., n размещены в ячейках I, II, ...; требуется заполнить ячейки числами всевозможными способами так, чтобы точно одно или два, и т. д. из них занимали первоначальные ячейки» [7, с. 542]. Результаты исследования были помещены в две таблицы. В первой число N элементов, сохраняющих свои позиции, связано с числом P всевозможных исходов, удовлетворяющих требованию «задачи о встречах»:

N	P
n	1
$n-1$	$n(n-1)$
$n-2$	$n(n-1)\left(1-1+\frac{1}{2}\right)$
$n-3$	$n(n-1)(n-2)\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)$

n–4	$n(n-1)(n-2)(n-3)\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)$
n–5	$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\left(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}\right)$

Заметим, что в комментариях к тому LEOO I, 7 (с. XV) Паскье указал на близость результата Эйлера к формуле $n(n-1)...(n-\lambda+1)(1-1+\frac{1}{2}+...+\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!})$, где ($n$–λ) – число элементов, сохраняющих позиции. В правой части таблицы даны решения «задачи о встречах» для конкретных значений k и n (k=0; n=1, 2, ..., 7).

К решению задачи о полном смещении элементов Эйлер обратился и в 1751 году, представив Берлинской Академии наук мемуар «Вычисление вероятности в игре “встреча”», где он писал: «Игра встреча является азартной; двое играющих имеют по полной колоде карт и извлекают их одну за другой до тех пор, пока не появятся одинаковые. В этом случае один из игроков выигрывает. Если же такой встречи не произойдет, то выигрывает другой. Нужно отыскать шансы на выигрыш каждого из этих двух игроков» [8, с. 11].

Для облегчения рассуждений Эйлер пронумеровал карты игроков числами от 1 до n, и, предположив, что A берет их в соответствии с числами натурального ряда, отметил, что он выигрывает, если B на i-м ходу извлекает карту с номером i. В противном случае выигрывает B. Начиная с частных случаев, Эйлер получил рекуррентное соотношение; он рассмотрел в качестве примера задачу для случая четырех карт, нашел число выигрышей A при m = 1, 2, 3, 4, после чего составил таблицу выигрышей A для большего количества карт. Результаты оказались те же, что и в H_6. Этот факт указывает на тесную связь между задачами о перестановках с ограниченными позициями элементов и о выигрыше в игре «встреча».

Задаче о полном смещении элементов Эйлер посвятил еще один мемуар: «Решение любопытного вопроса из учения о сочетаниях», где придал ей следующий вид: «...дана последовательность букв *a, b, c, d, ..., n*. Найти, сколькими способами можно изменить их порядок, чтобы ни одна не оказалась на том же месте, которое занимала вначале» [9, с. 435]. Число таких способов Эйлер обозначил через $\pi : n$. Идея, лежащая в основе разработанного метода, состояла в том, что вначале Эйлер нашел искомое число таких перестановок для n = 1, 2, 3, 4, 5, после чего перешел к общему случаю, когда на первом месте находится элемент b. Число полученных перестановок он умножил на n–1, так как первое место может занимать любая из n букв¸ отличных от a. Тогда результат подсчета дает значение $\pi : n$. С другой стороны, все перестановки с элементом b на первом месте Эйлер разбил на два множества: при a, стоящем на втором месте, и при a, стоящем на каком-либо другом месте. В первом случае он рассмотрел всевозможные перестановки из n–2 букв, то есть определил число $\pi : (n-2)$; во втором – составил перестановки из n–1 букв, то есть определил $\pi : (n-1)$. В связи с этим получил рекуррентную формулу

$$\pi : n=(n-1)(\pi : (n-1)+ \pi : (n-2)). \qquad (3)$$

Используя ее, Эйлер составил таблицу значений $\pi : n$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pi : n$	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961

Он заметил, что каждое из них является кратным предыдущего, увеличенным или уменьшенным на единицу:

$$\pi : n = n\pi : (n-1) \pm 1. \tag{4}$$

Справедливость (4) он проверил на конкретных примерах ($n = 1, 2, ..., 9$) и установил, тем самым, взаимную связь между формулами (3) и (4).

Частный случай «задачи о встречах» еще раз встречается в записях Эйлера, но сформулирован он уже в терминах шахматной игры: необходимо расставить n ладей на доске размера $n \times n$ на взаимно неатакующих позициях, причем одновременно запрещено располагать фигуры вдоль главной диагонали. Такую интерпретацию Эйлер дал не случайно: в различных комбинаторных задачах шахматные доски служат для изображения ограничений на позиции элементов и представляют собой таблицы, в которых переставляемые элементы отличаются номерами столбцов, а их позиции − номерами строк. Крестик, стоящий на пересечении строки и столбца, означает соответствующее ограничение. Такие таблицы называют еще **схемами ограничений**.

Наконец, в 1779 году задача о полном смещении элементов была сформулирована Эйлером как нахождение числа латинских прямоугольников размера $2 \times n$ [10]: «Сколькими различными способами при заданной первой строке можно варьировать вторую для конкретного значения n? Общей формулы Эйлер не получил, но предложил две рекуррентные: в первой каждый последующий член S определяется при помощи трех предыдущих P, Q, R:

$$S = 2R + Q + \frac{(P+Q)(P-Q)}{R+Q}.$$

Во второй формуле содержится только один предыдущий член P:

$$S = P(n-1) \cdot (n-2) \pm 1,$$

причем верхний знак берется при нечетном n, нижний − при четном. Поиски общей формулы продолжались до второй половины XIX века.

К комбинаторным задачам на шахматной доске относится и определение числа способов, какими можно без повторений пройти **ходом коня** все 64 клетки. Интерес к этой задаче поддерживался на протяжении многих веков. Однако общетеоретических подходов к ее решению разработано не было. В 1758 году Эйлер написал большой мемуар «Решение любопытного вопроса, который не поддается никакому анализу» [11]. Ему удалось найти частные решения, названные «открытыми ходами», так как в них конь не может попасть из последней 64-й клетки в первую. Затем Эйлер стал искать замкнутые маршруты, то есть «входящие в себя», и указал прием, позволяющий найти большое число таких ходов, когда известен хотя бы один открытый. После этого он перешел к изучению общего случая: не пользуясь частным решением, пройти все клетки шахматной доски, начиная с любой. Не пытаясь отыскать все решения, Эйлер обратил внимание на многочисленные, наиболее интересные с его точки зрения, частные условия задачи и в связи с этим сделал ряд ценных теоретических и практических выводов (см., напр. [12]).

В 1771 году Вандермонд обобщил задачу хода коня на трехмерный случай ($n = 4$), когда n^3 клеток шахматной доски представляются маленькими кубами. Спустя столетие, С. Фрост получил решение этой же задачи для n = 5, 6, 7, 8.

В некоторых комбинаторных исследованиях используется **принцип включения и исключения**. Л. Ю. Диксон [1, с. 119] указывает на его появление у Даниэля де Сильва в 1754 году, однако замечает, что еще в 1713 году А. Монмор эффективно использовал этот принцип при решении широко известной в те времена «задачи о встречах». Суть принципа заключается в следующем. Пусть имеется N элементов и некоторое число свойств $P_{(1)}$, $P_{(2)}$, $P_{(n)}$; пусть далее N_i — число элементов со свойством $P(i_1)$ а $N_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_{\mathrm{r}}}$ — число элементов со свойствами $P_{(i_1)}$, $P_{(i_2)}$, ..., $P_{(i_{\mathrm{r}})}$ соответственно. Тогда число элементов N_0, не обладающих ни одним из перечисленных выше свойств, задается формулой обращения:

$$N_{(0)} = N - \sum N_i + \sum_{i_1 < i_2} N_{i_1,\, i_2} - \ldots + (-1)^s \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_s} N_{i_1,\, i_2, \ldots,\, i_s} + \ldots + (-1)^n \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_n} N_{i_1,\, i_2, \ldots,\, i_n}$$

В ее правой части от общего числа элементов отнимается число тех элементов, которые не обладают в точности одним из указанных свойств; чтобы получить это число, из общего числа элементов, не обладающих каким-либо одним свойством, исключаются элементы, у которых отсутствует ровно два свойства, число таких элементов получается вновь при помощи разности и т. д.

Таким же путем можно найти число $N(r)$ элементов, обладающих точно r свойствами[1]:

$$N(r) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} N_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_r} + (-1)^{n-r} \cdot \begin{pmatrix} N \\ r \end{pmatrix} \cdot \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_s} N_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_s} + \ldots .$$

Этот метод широко использовал и Эйлер, однако дальнейшее его развитие происходило в XIX и даже XX веках.

Комбинаторно-геометрическими методами решалась также задача о разбиении n-угольника диагоналями на треугольники. В письме к Хр. Гольдбаху от 4 сентября 1751 года [13, с. 551–552] Эйлер показал, что число x способов такого разбиения может быть найдено при помощи рекуррентной формулы:

$$x = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot (4n-10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (n-1)}.$$

В письме к Д. Зегнеру он указал (без приведения общей формулы) семь первых чисел разбиения. В сообщении Петербургской Академии наук Зегнер опубликовал рекуррентную формулу

$$Z_{n+1} = Z_n + Z_3 Z_{n-1} + Z_4 Z_{n-2} + \ldots + Z_{n-2} Z_4 + Z_{n-1} Z_3 + Z_n$$

числа возможных разбиений (n+1)–угольника и привел таблицу таких разбиений до случая двадцатиугольника включительно [14]. Однако в предисловии к этому тому [14, с. 13–15], которое было написано Гольдбахом, указывалось, что Эйлер некогда сообщил ему формулу $Z_{n+1} = \dfrac{4n-6}{n} Z_n$, с помощью которой обнаружились некоторые ошибки в вычислениях Зегнера. Здесь же Гольдбах привел таблицу, содержащую число разбиений до двадцатипятиугольника включительно.

Формула Эйлера стала предметом исследования математиков следующего поколения. В 1766 году ею занимался С. К. Котельников[2], в 1810 году — Н. Н. Фусс[3]. Общий метод доказательства для данной задачи находится в письме Г. Ламе к Ж. Лиувилю [15]. В ответном письме Лиувиль писал, что формула Эйлера $Z_{n+1} = \frac{4n-6}{n} Z_n$ дает более простое решение, чем у Зегнера, однако установить их эквивалентность нелегко. По мнению ученого, наиболее изящное решение дал Ламе в 1838 году [15].

К рассмотренной задаче примыкает другая, привлекавшая внимание ученых XIX века: сколькими различными способами можно разложить данное произведение на n множителей?

Эйлеру принадлежит решение **задачи о кенигсбергских мостах**, стоящей у истоков теории графов. В письме к Дж. Мариони от 13 марта 1736 года он сформулировал эту задачу, отметив, в частности: «Вопрос этот, хотя и банальный, показался мне, однако, достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство. Поэтому мне пришла в голову мысль, не относится ли он случайно к геометрии положения, которую в свое время исследовал Лейбниц. После долгих размышлений я нашел легкое решение, с помощью которого можно во всех задачах такого рода тотчас же определить, может ли быть совершен такой обход через какое угодно число и как угодно расположенных мостов или не может» [16, с. 153]. Способ решения задачи Эйлер описывает и в одном из писем к К. Элеру, бургомистру г. Данцига, которое было написано 3 апреля 1736 года [16, с. 336–337].

Комбинаторную направленность имеет и мемуар «Наблюдения над новым особым родом прогрессий» [11], опубликованный в 1776 году. Эйлер считал достойными внимания две разновидности следующей задачи: «...как надо расставить в ряд пятнадцать турок и столько же иудеев, чтобы кара, заключающаяся в том, что после установления начала отсчета в определенном месте каждого девятого (или каждого десятого) выбрасывают в море, пала на одних только иудеев?» [17, с. 246].

Как и в большинстве своих исследований, Эйлер начинает с рассмотрения конкретной задачи: под каждым из 30 чисел записывает «порядок выброса», причем вычеркивается каждое девятое число. Затем строки транспонируются, а именно, в первой записываются номера выбрасываний, под ними — выбрасываемые числа, таким образом, получается «последовательность выбросов». Если продолжить эту последовательность, то число во второй строке, соответствующее номеру n в первой строке, будет совпадать с числом, соответствующим $n + 30k$, $k \in N$.

Затем Эйлер ставит общую задачу определения последовательности выбросов в зависимости от значений υ (числа знаков) и n, подмечает в них ряд закономерностей и получает рекуррентную зависимость для определения последнего выбрасываемого знака без предварительного знания порядка выбрасывания.

Определенный научный интерес представляет тот факт, что для частных случаев Эйлер предлагает способ нахождения сколь угодно удаленных членов последовательности с помощью так называемых скачков, то есть когда не нужно получать все промежуточные члены. Его он применяет для $n = 9$, продолжив последовательность для членов с номерами, превышающими 4000 (см., напр., [18]). Эйлер указывает также на возможность решения обратной задачи: для производных n и ν , зная порядок выброшенных знаков, отыскать их первоначальное расположение.

Те же результаты были получены Г. Шубертом спустя столетие, причем направление его исследований сходно с эйлеровским [19]. Шуберт указывал на свой приоритет в математическом решении этой задачи, что, как мы видели, не является верным.

Особое место в комбинаторном наследии Эйлера занимают **магические квадраты**. Часть материала находится в его «записных книжках». В заметке [20] Эйлер формулирует и решает две задачи построения таких квадратов, содержащих 9 членов арифметической прогрессии с: а) магической постоянной $S=b$ и разностью $d=a$; б) $S=b$ и первым членом a. Анализ заметки показывает, что уже в самой ранней из своих комбинаторных работ ученый существенно использует алгебраический аппарат. Еще в большей степени он применяет его в мемуаре «О магических квадратах» [21], в котором осуществлен переход от арифметической прогрессии к буквенным выражениям. Эйлер сформулировал правила расстановки латинских и греческих букв в квадратных таблицах, которые, по существу, определяют **латинские квадраты**; указал методы построения этих квадратов для $n = 3, 4, 5, 6$ и затронул вопрос нахождения их числа, а также сделал выводы о возможности построения магических квадратов порядков 3 и 4.

В работе 1779 года «Исследование магического квадрата нового типа» [10], тесно связанной с предыдущей, Эйлер углубляет и расширяет понятие магического квадрата. Мемуар начинается с формулировки популярной в XVIII веке задачи о 36 офицерах шести полков и шести различных званий, которых нужно выстроить в каре так, чтобы в каждой строке и каждом столбце стояли офицеры различных званий, взятые из разных полков. Для решения данной задачи Эйлер составляет **греко-латинский квадрат** (в современной терминологии — ортогональную пару латинских квадратов), исследует их структуру, касается вопроса классификации и получает ряд важных результатов (см., напр., [22]).

При создании комбинаторной теории латинских квадратов Эйлер задается вопросами подсчета их числа, выработки методов отождествления. В процессе таких исследований он вплотную подошел к понятию **группы подстановок** латинского квадрата, дал определение общего преобразования квадрата, тем самым предвосхитив объединение квадратов в классы изоморфизма (как обычного, так и сетевого), и осуществил практическое использование этих понятий: для порядка $n = 2, 3, 4, 5$ получил все такие классы, предварительно найдя число нормализованных квадратов, в том числе циклических и составных, т. е. составленных из латинских подквадратов. Для каждого конкретного порядка исследование носит специфический характер.

Изучая проблему ортогональности, Эйлер доказал существование решения для нечетных и четно-четных, то есть делящихся на 4, значений n. Для $n = 4k + 2$ задача не поддавалась решению, поэтому автор сформулировал ее как гипотезу: «...и я не ошибусь в том, чтобы сделать заключение о невозможности составления полного квадрата из 36 клеток, и что такая невозможность распространяется на случаи, когда n = 10, 14 и вообще на все нечетно-четные числа»[19, с. 492]. Несмотря на многочисленные попытки доказательства, эта гипотеза была опровергнута в 1960 году [23]. Задачу же о 36 офицерах решил Г. Тарри в 1900 году [24]. Он показал, методом проб и ошибок, перебрав все 22 класса нормализованных неизоморфных между собой латинских квадратов шестого порядка, что ни для одного из них не существует ортогональной пары.

Эйлер был глубоко убежден в том, что полученные результаты по теории латинских квадратов представляют научный интерес. Однако он не смог увидеть практической значимости своих исследований. Подтверждением этому являются заключительные слова мемуара: «На этом я заканчиваю исследование задачи, которая, будучи сама по себе незначительной, привела нас к очень важным результатам в теории чисел и комбинаторике, в частности» [10, с. 492].

Работы Эйлера в рассматриваемом направлении намного опередили его время. Вплоть до последней четверти XIX века не было заметно никаких продвижений в теории латинских квадратов. Толчком для дальнейшего ее развития послужили практические нужды сельского хозяйства, потребность в уменьшении числа экспериментов, необходимых в дисперсионном анализе и т. д. В начале XX века были заложены основы теории планирования экспериментов, значительное место в которой отведено латинским квадратам. Начиная с 30-х XX века они получили широкое и разностороннее применение.

Таким образом, в сочинениях Эйлера разработаны новые методы комбинаторного анализа, рассмотрены новые типы комбинаторных задач и введены новые комбинаторные понятия. Ему принадлежит решение вопросов, связанных с разбиениями натуральных чисел на слагаемые, созданием комбинаторной теории латинских квадратов. Прямо или косвенно он участвовал в развитии и решении большинства комбинаторных задач.

Примечания:

[1] Эйлер использовал символ $\left(\begin{matrix}N\\r\end{matrix}\right)$, который означает число сочетаний без повторений из N элементов, взятых по r, то есть C^r_N.

[2] N. Comm. (1764–1766).

[3] Работа опубликована в 1830 году в обобщенной постановке — о разбиении n-угольника на m-угольники.

Литература:

1. *Dickson L. E.* History of the Theory of Numbers. Vol. 2. Washington, 1920. (New-York, 1934).
2. *Leibniz G. W.* Dissertatio de arte combinatoria // G. W. Leibnitii Opera Omnia. Genevae, 1768. P. 341–399.
3. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных. М.: Гостехиздат, 1961. Т. 1. Гл. XVI.
4. *Euler L.* Observationes analyticae variae de combinationibus // Comm. Vol. 13 (1741–1743). 1751. P. 64–83.
5. *Euler L.* De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas // N. Comm. 1770. Vol. 14. P. 168–168.
6. *Tartaglia N.* General trattato di numeri et misure. Venetia, 1556.
7. *Euler L.* Problema de permutationen // LEOO I, 7. P. 542–576.
8. *Euler L.* Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre // Ibid. P. 11–25.

9. *Euler L.* Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum // Ibid. P. 435–440.

10. *Euler L.* Recherches sur une nouvelle carrés de quarres magiques // Ibid. P. 291–492.

11. *Euler L.* Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse // Ibid. P. 20–56.

12. *Малых А. Е., Угольникова О. Д.* Решение и развитие Эйлером одной из перечислительных задач комбинаторного анализа, рассматриваемой на шахматной доске / Пермский пед. ин-т. Пермь, 1983. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 18.07.1983. № 4028.

13. *Fuss P. H.* Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle. I. SPb, 1843. P. 654–655.

14. *Segner J. A.* Enumeratio moderum quibus figurae planae rectilineae per diagonales dividuntur in triangle // N. Comm. 1761. Vol. 7. P. 203–209.

15. Extrait d'une lettre de G. Lamé à J. Liouville sur cette question: Un polygone convexe étant donné, de combien de maniéres peut-on le partager en triangles au moyen diagonales? // J. Math. pures et appl. Paris, 1838. Vol. 3. P. 505–507.

16. Леонард Эйлер. Письма к ученым. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963.

17. *Euler L.* Observationes circa novum et singuleare progressionum genus // LEOO I, 7. P. 246–261.

18. *Малых А. Е.* О развитии одной из задач, относящихся расположению / Пермский пед. ин-т. Пермь, 1985. Деп. в ВИНИТИ 15.03.1985, № 1887.

19. *Шуберт Г.* Математические развлечения и игры. Одесса: Матезис, 1911.

20. *Euler L.* De quadratis magicis // LEOO I, 7. P. 535–539.

21. *Euler L.* De quadratis magicis // Ibid. P. 593–622.

22. *Малых А. Е.* О создании Эйлером комбинаторной теории латинских квадратов// ИМИ. М.: Наука, 1983. Вып. 27. С. 102–123.

23. *Bose R. C., Shrikhande S. S.* On the Falsity of Euler's Conjecture about the Nonexistence of Two Orthogonal Latin Squares of Order 4t + 2 // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1959. N. 45. P. 734–737.

24. *Tarry G.* Le probléme des 36 officiers // C. r. Assoc. Franc. Av. Sci. 1900. T. 1; 1901. T. 2. P. 189–266.

Жак Сезиано
Лозанна, Швейцария

К истории теоремы Эйлера о многогранниках (1750–1811)

Abstract: Euler's idea to prove the polyhedron theorem $S+F-A=2$ (S vertices, F faces, A edges) was to remove pyramids until a tetrahedron is obtained, for which evidently $S+F-A=2$. The theorem will then be proved by showing that the quantity $S+F-A$ does not change its value in the process. Now Euler considered two ways of decomposing the polyhedron: from the outside, thus by removing pyramids with each individual apex being one of the polyhedron's vertices, or from within, thus by removing the pyramids with a common apex inside the polyhedron and as individual base one of the polyhedron's faces. Euler chose the first possibility. His successors, however, preferred the second decomposition. This led to new proofs, generalizations (in particular to non-convex polyhedra), and finding exceptions. All this paved the way to the modern definition of the term "polyhedron".

1. Теорема о многогранниках и ее доказательство у Эйлера

Исследования Эйлера по теории многогранников начинаются, кажется, в Берлине. В письме Эйлера к Гольдбаху от 14 ноября 1750 г. мы находим упоминание о разных свойствах многогранников и, в частности, две теоремы, похожие на две теоремы о многоугольниках «число сторон равно числу углов» и «сумма внутренних углов равна $2n$–4 прямых угла», где n число сторон. Первая из этих теорем о многогранниках формулируется, словами Эйлера, так: У всякого тела, заключенного между плоскими гранями, сумма числа граней и числа телесных углов превышает на два число ребер. Для этой теоремы Эйлер также пишет символически

$$H + S = A + 2,$$

где H (*<u>h</u>edrae*) — число граней (сегодня обычно пишут F), S (*anguli <u>s</u>olidi*) — число вершин и A (*<u>a</u>cies*) — число ребер. Вторая теорема утверждает, что сумма плоских углов многогранника равна $4S$–8 прямым углам. Для Эйлера кажется очень странным, что никто прежде не заметил эти два свойства. Эйлер не знал, что вторая теорема имеется в одной рукописи Декарта, где мы также видим, что сам Декарт был очень близок к открытию первой теоремы. Кроме того, Эйлер думает, что строгое доказательство обеих теорем будет очень трудно найти[1]. Во всяком случае, у него еще не было доказательства во время написания этого письма.

Спустя две недели (28 ноября), Эйлер читал в Академии свои *Elementa doctrinae solidorum* («Начала учения о телах»). В этом первом сообщении (а также в дальнейшем первом издании) о теореме, Эйлер повторяет то, что мы уже видели в письме к Гольдбаху. Что касается самой теоремы, то вместо доказательства мы найдем в этой статье просто проверку теоремы с помощью нескольких примеров[2]. Эйлер рассматривает различные многогранные тела, более или менее простые, но всегда выпуклые, у которых он подсчитывает число граней и вершин и показывает, что оно равно числу ребер плюс два. После этого он делает такую же проверку для пяти правильных многогранников[3]. Для него этого на данный момент достаточно[4]. Но из его текста мы понимаем, что это рассуждение лишь предварительно, и что в дальнейшем он приведет истинное доказательство. Тем временем, Эйлер предполагает, что, может быть, другие математики найдут доказательство этой и других теорем стереометрии[5]. Из всех примеров Эйлера очевидно, какое значение принимает у него слово «многогранник»: во-первых, грани многогранника всегда многоугольники; во-вторых, все эти многогранники выпуклые.

Наконец, спустя 10 месяцев, 9 сентября 1751 г., Эйлер представил свое доказательство в Академии (*Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*, т. е. «Доказательство некоторых замечательных свойств, которыми прославились тела, заключенные между плоскими гранями» [3]). В начале Эйлер рассматривает один многоугольник. Доказательство первого свойства (число сторон s равно числу углов u) довольно легкое, как он показывает [3, с. 143–144 (96)].

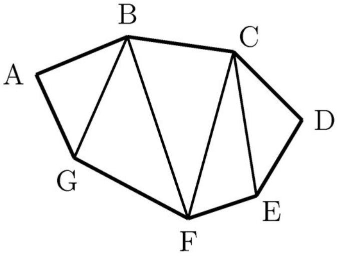


Рис. 1

Возьмем любой (выпуклый) многоугольник, например $ABCDEFG$ (рис. 1).

Разделим его на треугольники. Если мы удаляем один угол, например D, то исчезают угол D и две стороны CD и DE, но появляется новая сторона CE, так что $u \to u-1$, $s \to s-1$. После удаления второго угла E мы имеем $u-2$, $s-2$. В конечном итоге, после удаления n углов, остается простой треугольник, для которого теорема выполняется (u=3=s), так что $u-n = 3$, $s-n = 3$, то есть имеем $u=n+3=s$.

Руководствуясь этой идеей, Эйлер нашел свое доказательство для многогранников. С ними он будет делать то же самое: он будет удалять одну вершину за другой до тех пор, пока не останется только один четырехгранник. А для последнего очевидно, что теорема выполняется ($H+S-A=4+4-6=2$), так что теорема в общем будет верна, если после каждого удаления телесного угла вариация $H+S-A$ равна нулю: тогда $H+S-A$ всегда будет равно двум.

На самом деле, удаление телесного угла не так просто, как было удаление треугольников. После удаления мы находим под телесным углом новые ребра и новые грани.

1. Когда мы отнимаем один телесный угол со, скажем, n ребрами, то исчезают (рис. 2): одна вершина ($S \to S-1$) ; n ребер ($A \to A-n$) ; n граней ($H \to H-n$).

2. После удаления мы найдем, как можно увидеть из рис. 3, n — 3 новых ребер и $n-2$ новых граней, так что уменьшение сводится к $A \to A-3$, $H \to H-2$.

3. Если одна грань телесного угла — не треугольник (рис. 4), то после удаления треугольной грани остается часть первоначальной грани, так что $A \to A-3+1$, и появляется новое ребро, так что $H \to H-2+1$. Если этот случай повторяется, скажем, p раз, то будем иметь $A \to A-3+p$, а также $H \to H-2+p$.

Отсюда уже выводим, что

$$(H-2+p)+(S-1)-(A-3+p)=H+S-A,$$

так что вариация будет равна нулю.

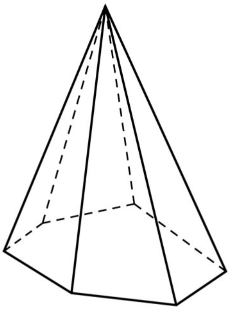


Рис. 2

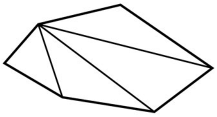


Рис. 3

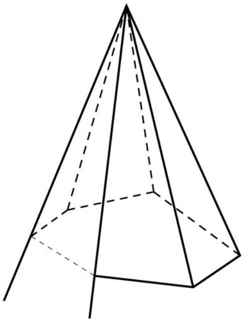


Рис. 4

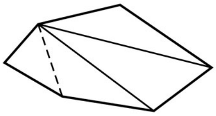


Рис. 5

Такова первая версия доказательства, которую можно найти в пятой записной книжке Эйлера [4, с. 184–185]. Для дополнения доказательства необходимо четвертое условие, которое имеется во второй версии [3, с. 151 (101)].

4. Может оказаться, что число новых ребер и, следовательно, число граней после удаления телесного угла уменьшится, потому что несколько последовательных вершин нового основания компланарные (рис. 5). Если таким образом исчезают m ребер и, следовательно, m граней, то мы имеем во втором случае, вместо $A \to A-3$ и $H \to H-2$, $A \to A-3-m$ и $H \to H-2-m$, так что теперь, в итоге, находим

$$(H-2-m+p)+(S-1)-(A-3-m+p) = H+S-A.$$

Таким образом, словами Эйлера, эта теорема (и другие) в этой статье *firmissimis demonstrationibus sunt munita* (подкреплены самыми надежными доказательствами — *Прим. ред.*) [3, с. 157 (105)].

Однако может случиться, что в процессе удаления одно из полученных тел больше не выпуклое, в противоположность тому, что Эйлер предполагал вначале.

Для построения своего доказательства, Эйлер рассматривал два способа для разложения выпуклого многогранника на пирамиды:

- Возьмем одну произвольную точку в многограннике, от которой проведем прямые к каждой его вершине (произвольную точку можно взять, так как у Эйлера многогранник выпуклый). Таким образом, целый многогранник разложится на пирамиды, основание каждой из которых — одна из граней многогранника. А каждая из этих пирамид легко сведется к треугольной пирамиде, потому что можно разделить ее основание на треугольники (см. рис. 1). Что же касается самого доказательства, Эйлер пишет, что этот способ мало полезен[6]. Мы увидим далее, что именно такое разложение было источником первых обобщений и исключений из теоремы о многогранниках Эйлера.
- По аналогии с тем, что в результате удаления треугольников в конце останется только один треугольник, Эйлер хочет постепенно удалять пирамиды или, лучше, телесные углы, дабы наконец осталась только одна треугольная пирамида[7]. Эйлер остановил свой выбор на этом втором способе для своего доказательства.

2. Доказательство Лежандра

Лежандр (A. M. Legendre, 1752–1833) изложил новое доказательство теоремы многогранников. Возьмем в многограннике точку. От этой точки проведем прямые к каждой вершине многогранника и одновременно к поверхности единичной сферы (т. е. с радиусом, равным единице, и с центром в этой точке). Тогда теорема Эйлера вытекает из свойств суммы сферических многоугольников [5, livre VII, prop. XXV].

Как мы знаем, сумма углов сферического треугольника всегда больше 180°, и разность, выраженная в радианах, как

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi,$$

равна площади треугольника на единичной сфере. В общем, площадь одного многоугольника с n сторонами и углами α_i на единичной сфере равна

$$\Sigma_i \alpha_i - (n-2)\pi.$$

Если теперь рассматривать m сферических многоугольников на целой единичной сфере, таких, что площадь многоугольника k равна

$$\Sigma_i \alpha_{ik} - (n_k - 2)\pi,$$

тогда сумма площадей всех m сферических многоугольников на сфере будет

$$2\pi S - 2A\pi + 2\pi H = 4\pi,$$

потому что сумма углов вокруг каждой из S вершин равна 2π, сумма сторон равна $2A$ (каждая считается два раза), число уравнений m равно числу граней многогранника, т. е. H, и, наконец, площадь единичной сферы равна 4π.

Как мы видим, необходимо, чтобы сферические многоугольники не накладывались один на другой, и, конечно, чтобы они покрывали всю единичную сферу. Спустя примерно 15 лет после этого доказательства, Пуансо (L. Poinsot, 1777–1859) заметил, что если в многограннике найдется точка, от которой к каждой его вершине можно провести отрезки, целиком содержащиеся в многограннике, то теорема Эйлера справедлива и для соответствующего невыпуклого многогранника[8]. Таково первое обобщение теоремы Эйлера.

3. Доказательство Люилье

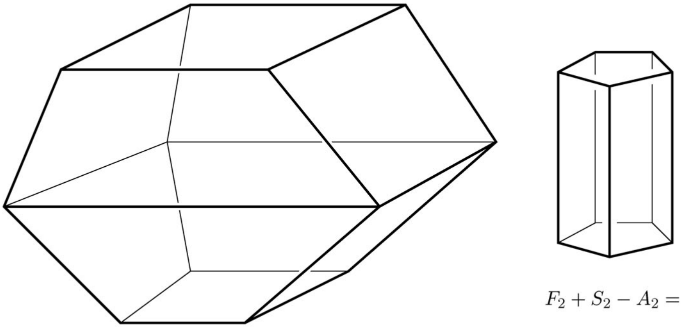
Доказательство Лежандра было более очевидным. Но, по мнению Люилье (S. A. l'Huilier, 1750–1840), нужно было найти более доступное доказательство[9]. Люилье, гражданин Женевской Республики (сегодня — кантон Швейцарии), написал несколько статей о многогранниках. Особенно замечательна его статья, которую можно прочитать в докладах Петербургской Императорской академии, и где мы найдем новое доказательство и первое упоминание об исключениях из теоремы Эйлера.

Это доказательство точно противоположно доказательству Эйлера, потому что Люилье начинает с простой пирамиды и кончает полным телом. И в этом случае нужно обратить внимание на то, чтобы эти пирамиды заполняли тело. Отсюда его исключения.

Возьмем одну пирамиду, для которой, как мы знаем, теорема верна. Сначала Люилье проверяет, что в случае, если эта пирамида имеет тождественную грань с другой пирамидой (*отсюда исключение* 1), то теорема остается справедливой; то же самое можно сказать, когда одна пирамида имеет тождественные грани с двумя другими пирамидами. В полном теле все эти пирамиды имеют общую вершину, которая находится либо внутри многогранника, либо совпадает с одной из его вершин (после этого такие многогранники можно соединять один с другим, если у них есть тождественная грань). Как мы видели, доказательство Эйлера основывается на удалении пирамид, а доказательство Люилье, напротив, основывается на объединении пирамид. Но во втором случае необходимо удостовериться в том, что составленное тело будет гомеоморфно сфере, как выразились бы сегодня (*отсюда исключения* 2–4).

Рассмотрим теперь теорему Эйлера в форме $F+S-A=2$ (Люилье использует обозначение F, «face», вместо H Эйлера).

(1) Возьмем два многогранника. Так как для каждого многогранника справедлива теорема Эйлера, то имеются равенства $F_1+S_1-A_1=2$, $F_2+S_2-A_2=2$ (рис. 6).



$F_1 + S_1 - A_1 = 2$

$F_2 + S_2 - A_2 = 2$

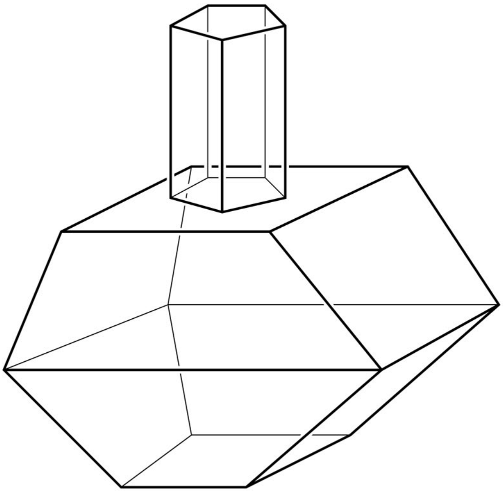
Рис. 6

Если одна грань первого тела равна грани второго, и мы объединим их двумя тождественными гранями, то новое тело будет многогранником, значит, теорема Эйлера верна. Но если мы объединим их снаружи или (как полость) изнутри двумя неравными гранями, так что одна из этих двух граней содержится в другой, тогда имеем для нового тела $F+S-A=3$ (рис. 7).

Вообще, в случае n таких объединений, мы будем иметь[10]

$$F+S-A=2+n.$$

Таково первое исключение. Но такое тело для нас сегодня не многогранник, потому что у многогранника каждая грань должна быть односвязной. Но, как пишет Люилье, он говорит об этом случае, поскольку можно увидеть такие тела в природе, то есть среди кристаллов.



$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 - 1 \\ S &= S_1 + S_2 \\ A &= A_1 + A_2 \end{aligned}$$

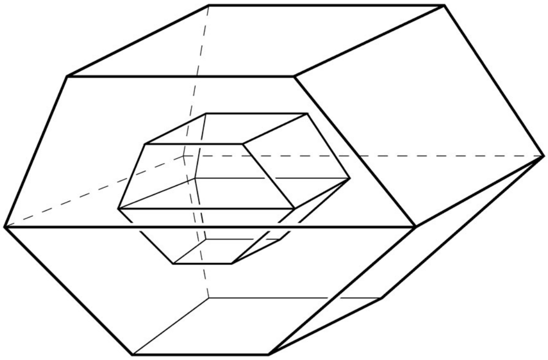
$$F + S - A = (F_1 + S_1 - A_1) + (F_2 + S_2 - A_2) - 1 = 3$$

Рис. 7

(2) Рассмотрим некоторый многогранник и некоторую многогранную поверхность, полностью заключенную в первом теле как полость. Тогда для них имеем:

$$F_1 + S_1 - A_1 = 2 \text{ и } F_2 + S_2 - A_2 = 2,$$

и вместе (рис. 8)



$$F + S - A = 4$$

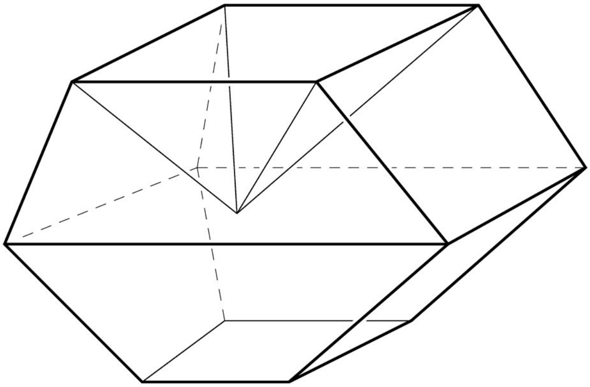
Рис. 8

Вообще, когда имеется n таких полостей, если ни одна полость не пересекается и не соприкасается с другой, то справедливо равенство[11]

$$F + S - A = 2 + 2n.$$

Таково второе исключение у Люилье. Но сегодня для нас и такое тело не многогранник, потому что его поверхность не едина.

(3) Возьмем некоторый многогранник, для которого $F_1+S_1-A_1=2$. Удалим в нем внутреннее пирамидальное тело с m ребрами, основание которого совпадает с одной из граней исходного многогранника. Что касается нового тела (рис. 9), то для него имеем



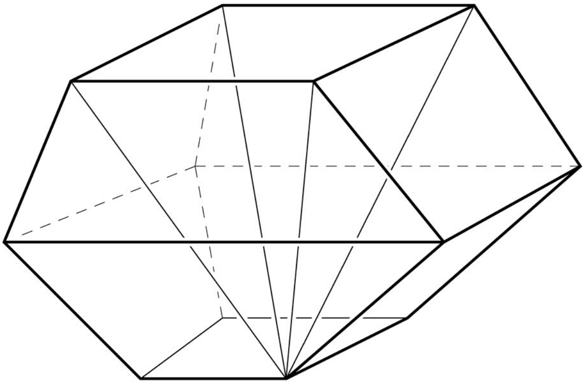
$$\begin{aligned} F &= F_1 - 1 + m \\ S &= S_1 + 1 \\ A &= A_1 + m \end{aligned}$$

$$F + S - A = F_1 + S_1 - A_1 = 2$$

Рис. 9

Как и прежде, формула Эйлера имеет место.

Но если теперь вершина пирамиды совпадает с одной из вершин многогранника (рис. 10), то получим



$$\begin{aligned} F &= F_1 - 1 + m \\ S &= S_1 \\ A &= A_1 + m \end{aligned}$$

$$F + S - A = F_1 + S_1 - A_1 - 1 = 1$$

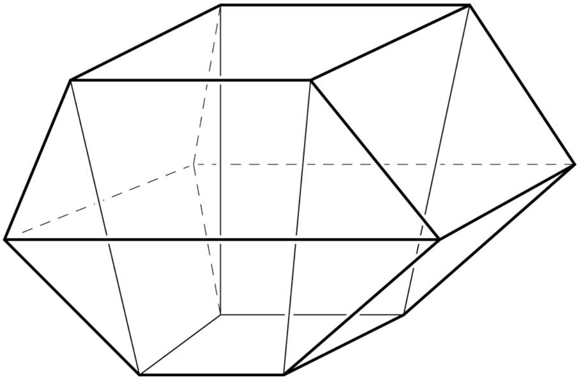
Рис. 10

Вообще, в случае n таких пирамид[12]

$$F+S-A=2-n.$$

Таково третье исключение. Однако это тоже не многогранник, потому что у многогранника в каждой вершине должен быть только один телесный угол.

(4) Возьмем некоторый многогранник, для которого $F_1+S_1-A_1=2$, и другой, для которого $F_2+S_2-A_2=2$, с m ребрами, две противоположные грани которого равны двум граням первого многогранника. Пусть второй многогранник образует сквозное многогранное отверстие в первом. Тогда мы находим для нового тела[13] (рис. 11).



$$\begin{aligned} F &= F_1 - 2 + m \\ S &= S_1 \\ A &= A_1 + m \end{aligned}$$

$$F + S - A = F_1 + S_1 - A_1 - 2 = 0$$

Рис. 11

Таково четвертое исключение. Его обобщение находим у Жергона (J. D. Gergonne, 1771–1859): если многогранник имеет n таких различных отверстий, тогда[14]:

$$F+S-A=2-2n.$$

Сегодня эта новая константа $2-2n$ называется эйлеровой характеристикой. Очевидно, что для такого тела поверхность едина, как и необходимо.

В итоге, мы видим из этих исключений, что ограниченная теорема Эйлера, т. е. $F+S=A+2$, будет верна для многогранника, если: 1) его грани — только (односвязные) многоугольники; 2) его поверхность едина; 3) в каждой его вершине имеется только один телесный угол; 4) его поверхность односвязна.

Однако эти четыре условия были явно сформулированы лишь через семьдесят лет после открытия теоремы Эйлером. Для него же многогранником было просто выпуклое тело, заключенное между плоскими гранями. Основанием для последующих исследований до 1811 года стало разложение многогранника на пирамиды от внутренней точки. А это была, как мы видели в конце первой части этой статьи, начальная мысль Эйлера.

Примечания:

1. «*...so schwer zu beweisen sind; denn ich kann dieselben noch nicht so beweisen, daß ich damit zufrieden bin*» [1, p. 538], [1*a*, p. 333].

2. «*...Fateri equidem cogor me huius theorematis demonstrationem firmam adhuc eruere non potuisse; interim tamen eius veritas pro omnibus solidorum generibus, ad quae examinabitur, non difficulter agnoscetur, ita ut sequens inductio vicem demonstrationis gerere queat*» [2, p. 119 (79); подчеркнуто мною. — *Ж.С.*].

3. «*Etsi haec* [т. е. все эти примеры] *sufficere possent ad veritatem propositionis evincendam, tamen eam praeterea ex corporibus regularibus confirmare lubet*» [2, p. 123 (82)].

4. «*Cum igitur veritas propositionis in his omnibus casibus sibi constet, dubium est nullum, quin ea in omnibus omnino solidis locum habeat, sicque propositio sufficienter videtur demonstrata*» [2, p. 124 (82)].

5. «*...quae ideo potissimum hic proponenda duxi, ut alios, quibus hoc studium curae cordique est, excitem ad istas demonstrationes investigandas*» [ibid., p. 140 (93)].

6. «*Sumto quidem puncto quocunque intra solidum, si inde ad singulos angulos solidos lineae rectae ductae concipiantur, solidum hoc modo in totidem pyramides dividetur, quot sunt hedrae, quippe quae singulae bases pyramidum constituent, dum earum vertices in illo puncto uniuntur. Atque hae pyramides, nisi sint triangulares, porro facile in triangulares dissecabuntur. Verum hic modus solidum quodcunque in pyramides triangulares resolvendi ad praesens institutum parum confert*» [3, p. 143 (95–96)]

7. «*...alterum ergo modum, quo quodvis solidum resecandis successive eius angulis solidis tandem ad pyramidem triangularem redigitur, hic exponam, unde deinceps demonstratio memoratarum propositionum* (значит: $H + S = A + 2$ и сумма плоских углов = $4S - 8$) *facile concinnabitur*» [3, p. 143 (96)].

8. «*Je ferai d'abord observer que l'équation précédente* [т. е. $H+S=A+2$] *n'a pas seulement lieu pour les solides convexes ordinaires, c'est-à-dire, pour ceux dont la surface ne peut être coupée par une droite en plus de deux points: elle subsiste encore pour tout polyèdre qui a des angles solides rentrans, pourvu qu'on puisse trouver, dans l'intérieur du solide, un point qui soit le centre d'une sphère telle que les faces du solide y étant projetées par des lignes menées au centre, il n'y ait sur la sphère aucune duplicature de ces projections; je veux dire, pourvu qu'aucune face ne se projette, en tout ou en partie, sur la projection d'une autre; ce qui convient, comme on voit, à une infinité de polyèdres à angles solides rentrans*» [6, p. 46].

9. «Le Gendre*, dans ses Éléments de Géométrie, a démontré les mêmes théorèmes d'une manière élégante et remarquable par sa brièveté. Sa démonstration est fondée sur l'expression de la surface d'un polygone sphérique dans ses angles. Comme cette dernière expression suppose des principes sur les polygones sphériques, qui ne peuvent être établis que par des développemens un peu longs; la démonstration de* Le Gendre *ne me paroît pas avoir le degré de simplicité (quant aux principes sur lesquels elle répose), que l'on est en droit de demander pour une proposition fondamentale*» [7, p. 273], [7*a*, p. 170–171].

10. Словами Люилье: «*Soit un solide P, sur une des faces duquel on applique un solide P', de manière qu'une partie seulement d'une face de P soit recouverte par une des faces de P', et qu'il reste à la première un rebord ou anneau polygonal. (...) J'affirme que dans le solide P'', provenu de cette application, la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse de trois unités le nombre des arrêtes. (...) Cette proposition est la même, soit que le solide P' soit appliqué au solide P extérieurement à lui, soit qu'il lui soit appliqué intérieurement, de manière que le solide P'' ait un creux, dont l'ouverture est une partie seulement d'une de ses faces, capable d'être rempli par le solide P'. (...) Qu'on fasse* (обобщение!) *la même application sur un plus grand nombre de faces du solide P. Dans le solide composé la différence entre la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides, et le nombre des arrêtes, surpasse deux d'autant d'unités qu'il y a de pareilles applications*» [7, p. 287–289], [7*a*, p. 187].

11. Словами Люилье: «*Les solides ouverts qui donnent lieu à l'exception du second genre, sont les différences de deux solides dont l'un est intérieur à l'autre; de manière à retrancher complètement de celui-ci une ou plusieurs de ses faces. Que le solide retranché soit entièrement intérieur à l'autre; de manière qu'on obtienne un solide aïant une cavité intérieure, dont le contour est détaché du contour extérieur. Dans le solide qui est la différence des deux premiers, la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse de quatre unités le nombre des arrêtes. Si un polyèdre* (обобщение!) *a un nombre n de pareilles arrêtes, détachées les unes des autres, l'excès de la somme du nombre de ses faces et du nombre de ses angles solides sur le nombre de ses arrêtes est plus grand que deux, de deux fois le même nombre, en sorte qu'on a $F+S=A+2+2n$*» [7, p. 300–301], [7*a*, p. 184–185].

12. Словами Люилье: *«L'exception, dont je parle, renferme encore le cas dans lequel un solide a un creux pyramidal, qui a pour base une face supprimée du solide, et qui a pour sommet un des sommets du polyhèdre situé hors de cette face.* (...) *Pour chaque creux détaché* (обобщение!), *conformément à la supposition, la différence entre la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides, et le nombre des arrêtes, diminue d'une unité. Ainsi, pour deux creux de cette espèce la différence est zéro. Pour un nombre de creux supérieur à deux, le nombre des arrêtes surpasse la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides d'autant d'unités, qu'il y a de creux au-delà de deux»* [7, p. 297, 298].

13. Словами Люилье: *«Que le solide soit percé de part en part de manière à retrancher complétement deux des faces du polyhèdre. Dans le solide ainsi ouvert la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides est égal* (sic) *au nombre des arrêtes»* [7, p. 296], [7*a*, p. 186].

14. Словами Жергона [7*a*, p. 186]: *«En général un polyèdre terminé par une surface unique peut être percé, de part en part, par un nombre plus ou moins grand d'ouvertures distinctes. Si n désigne le nombre de ses ouvertures, on aura* $F+S=A-2(n-1)$*»*.

Литература:

1. *Fuss P. H.* Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres. T. 1. SPb, 1843. P. 536–539.

1*a*. *Juškevič A. P., Winter E.* Leonhard Euler und Christian Goldbach, Briefwechsel 1729–1764 // Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Kl. für Philosophie... T. 1. 1965.

2. *Euler L.* Elementa doctrinae solidorum // N. Comm. T. 4 (ad annum 1752, 1753). 1758. P. 109–140 (= LEOO I, 26. P. 71–93).

3. *Euler L.* Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita // Ibid. P. 140–160 (= LEOO I, 26. P. 94–108).

4. *Белый Ю. А.* К теореме Эйлера о многогранниках // ИМИ. Вып. 16. 1965. С. 181–186.

5. *Legendre A.-M.* Elémens de géométrie. Paris, 1794 (часто переиздававшееся).

6. *Poinsot L.* Mémoire sur les polygones et les polyèdres // Journal de l'Ecole polytechnique. Paris, 1810. T. 10, 4. P. 16–48.

7. *L'Huilier S.* Démonstration immédiate d'un théorème fondamental d'Euler sur les polyhèdres et exceptions dont ce théorème est susceptible // MAS SPb. T. 4 (ad annum 1811). 1813. P. 271–301.

7a. *L'Huilier S.* Mémoire sur la polyédrométrie; contenant une démonstration directe du Théorème d'Euler sur les polyèdres, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti... (Extrait) par M. Gergonne (который резюмирует и комментирует статью Люилье. — *Ж.С.*) // Annales de mathématiques pures et appliquées. T. 3. 1812–1813. P. 169–189.

Е. А. Кац
Седе Бокер, Израиль

Теорема Эйлера о многогранниках и современные представления о молекулярной структуре фуллеренов и фуллереноподобных наноструктур

Abstract: The discovery of C_{60}, a third variety of carbon, in addition to the more familiar diamond and graphite forms, has generated enormous interest in many areas of physics, chemistry and material science. Furthermore, it turns out that C_{60} is only the first of an entire class of closed-cage polyhedral molecules consisting of only carbon atoms — the fullerenes (C_{20}, C_{24}, C_{26}, ... C_{60}, ... C_{70}, ... $C_{1000000}$-carbon nanotubes). On the other hand, history of this discovery is a brilliant example of application of the Leonhard Euler's results, and in particular the Euler theorem on the relation between the numbers of faces, vertices and edges in polyhedra, in modern science.

1. Введение

Научное наследие Леонарда Эйлера уникально в истории науки как по количеству и разнообразию полученных им результатов, так и по их влиянию на развитие самых разных областей исследования. В настоящей статье представлен яркий пример применения одного из результатов Леонарда Эйлера, в частности, его знаменитой теоремы о соотношении между числом вершин, ребер и граней многогранников, в современной науке о фуллеренах, недавно открытых углеродных нанокластерах.

2. Теорема Эйлера

В двух статьях, опубликованных в «Записках Петербургской Академии наук» в 1758 г., — «Элементы учения о телах» [1] и «Доказательство некоторых замечательных свойств, которым подчинены тела, ограниченные плоскими гранями» [2] — Леонард Эйлер сформулировал и доказал теорему о том, что для любого выпуклого многогранника справедливо следующее соотношение между числом его вершин (В), ребер (Р) и граней (Г)[1]:

$$В - Р + Г = 2 \tag{1}$$

Ключом к полученному Эйлером результату явились впервые введенные им понятия *вершины* и *ребра* многогранника, а эта теорема положила начало разделу современной математики, называемому топологией.

Считается, что соотношение, подобное уравнению (1), предлагал еще Декарт (1596–1650). Однако, это не совсем так.

В 1649 г., за год до смерти, Декарт прибыл в Стокгольм в качестве личного учителя девятнадцатилетней королевы Кристины. После смерти Декарта его рукописи были отправлены во Францию, но почти сразу же по прибытии в Париж ящик с рукописями угодил в Сену, откуда они были извлечены уже во времена Лейбница. Среди «высушенных» записок имелись короткие заметки по теории многогранников. Лейбниц собственноручно скопировал несколько манускриптов, в том числе шестнадцатистраничную статью под названием «Progymnasmata de slidorum elementis» («Упражнения с элементами тел»). Оригинал Декарта впоследствии пропал, но и копия Лейбница бесследно исчезла в его архиве и была обнаружена лишь в 1860 г. В период более чем двухсот лет после смерти Декарта и ста лет после работы Эйлера, никто, кроме Лейбница, не знал о статье Декарта, а Лейбниц, по всей видимости, никому о ней не сообщал.

Верно, что Декарт установил, что число плоских углов в многограннике равно 2φ+2Г–4, где φ обозначает число телесных углов. Также верно и то, что Декарт сформулировал, что плоских углов всегда вдвое больше, чем ребер. Простое соединение двух этих положений, конечно, даст формулу (1), но этого шага Декарт не сделал...

3. История открытия фуллеренов

В течение долгого времени человечество было знакомо лишь с двумя кристаллическими модификациями углерода — графитом и алмазом. В 1985 г. была открыта молекула C_{60}, первая из семейства фуллеренов, замкнутых многогранных молекул чистого углерода. История этого открытия [3] представляет яркий пример взаимопроникновения различных наук (химии, физики, математики, астрономии) и является прологом создания новых материалов и технологий, которые в третьем тысячелетии найдут применение в наноэлектронике, солнечной энергетике и других отраслях техники.

Задолго до экспериментального открытия фуллеренов несколько ученых предвидели возможность существования молекул, состоящих только из атомов углерода, помещенных в вершины выпуклого многогранника, в частности, усеченного икосаэдра (рис. 1). История изучения многогранников уходит корнями в глубь тысячелетий и представлена такими «ключевыми» для нашей цивилизации именами как Платон, Архимед, Пьеро делла Франческа, Лука Пачоли, Леонардо да Винчи, Дюрер, Кеплер [3].

В 1966 г. Д. Джонс предположил, что внедрение в графитовый слой, состоящий из правильных шестиугольников (рис. 2), дефектов в виде пятиугольников может превратить этот плоский слой в полую замкнутую оболочку — гигантскую каркасную молекулу углерода [4]. В 1970 г. японский химик-органик Э. Осава опубликовал короткую статью по-японски [5] о возможности существования стабильной молекулы из шестидесяти атомов углерода в виде усеченного икосаэдра, C_{60}. А еще через два года расчет электронной структуры такой молекулы, выполненный в СССР, количественно подтвердил стабильность C_{60} [6].

Как бы то ни было, к 1985 г. ни одно из вышеупомянутых теоретических предсказаний не было оценено по достоинству научным сообществом. Еще более удивительно, что остались практически незамеченными опубликованные в 1984 г. экспериментальные результаты, свидетельствующие о преобладании в

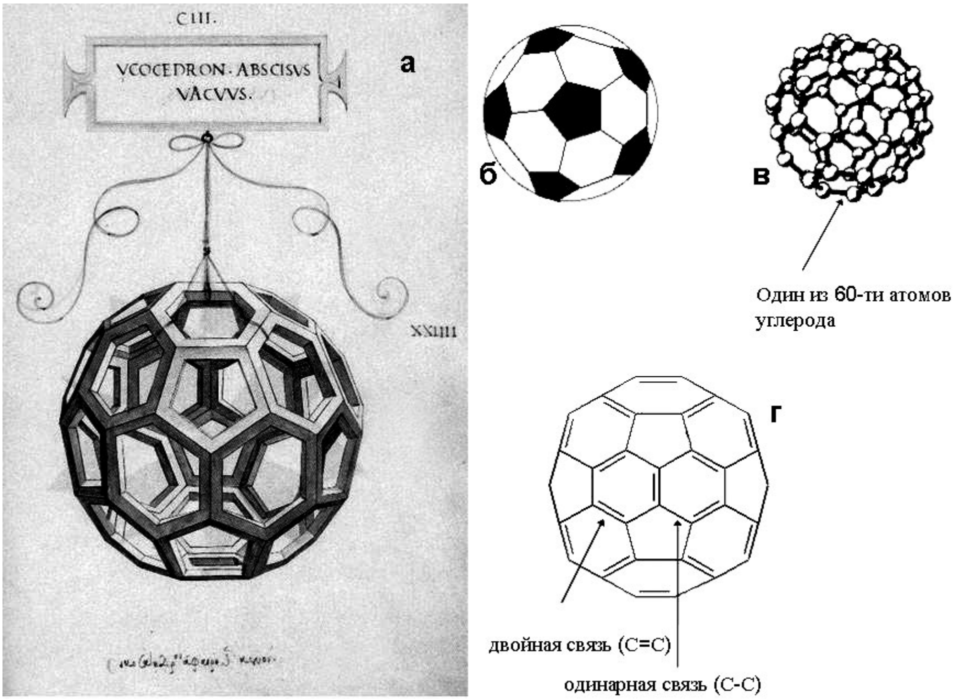


Рис. 1. Усеченный икосаэдр: (а) иллюстрация Леонардо да Винчи в книге Луки Пачоли «Божественная пропорция» (1509); (б) футбольный мяч; (в-г) молекула C_{60}

масс-спектре углеродных кластеров молекул с четным числом атомов от C_{36} до C_{100}, при этом наиболее интенсивный пик был у C_{60} (рис. 3) [7]. Сегодня очевидно, что все эти пики обусловлены фуллеренами, но тогда это было невозможно объяснить.

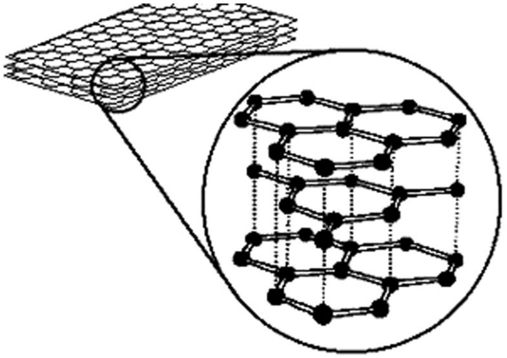


Рис. 2. Кристаллическая структура графита

К началу 80-х гг. профессор Гарольд Крото из английского университета Сассекс был достаточно известным ученым в области микроволновой спектроскопии и радиоастрономии. В то же время профессор Ричард Смолли (1943–2005) из университета Райса (США) разработал уникальную аппаратуру, позволившую провести пионерские работы по изучению формирования кластеров тугоплавких элементов и, в сотрудничестве с группой профессора Роберта Кёрла из того же университета, кластеров полупроводников.

В 1984 г., во время своего краткого визита в лабораторию Смолли, Крото предложил использовать имеющуюся там аппаратуру для моделирования

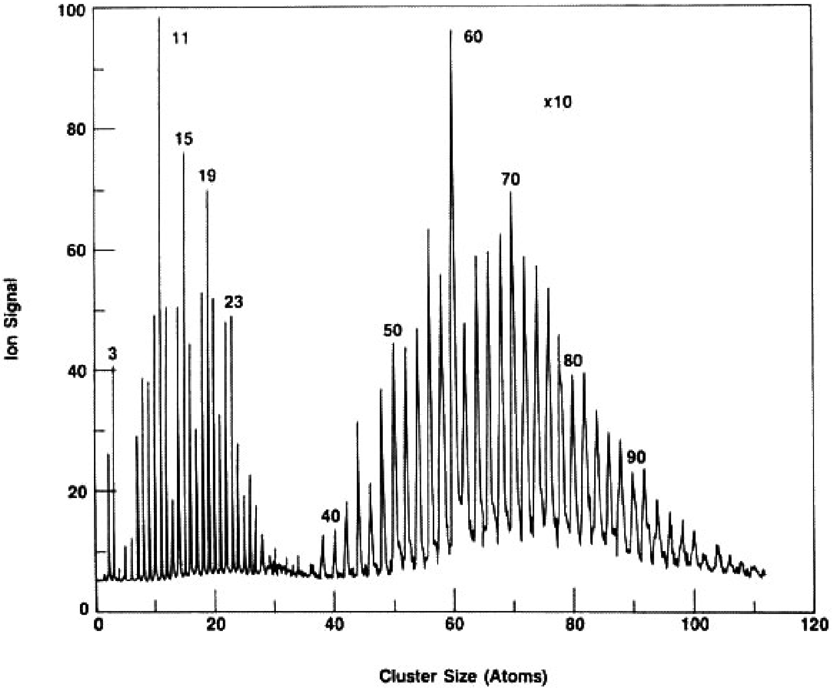


Рис. 3. Масс-спектр кластеров углерода в сверхзвуковом пучке, образующихся при лазерном испарении углеродной мишени [7]

условий в атмосфере гигантских красных углеродных звезд. Эксперимент, предложенный Крото, ставил своей целью анализ межзвездных источников излучения путем сравнения данных радиоастрономии с результатами масс-спектроскопического исследования кластеров, полученных в лаборатории. Именно эта идея стимулировала совместный эксперимент Крото, Кёрла и Смолли в сентябре 1985 г., приведший к абсолютно неожиданному результату — открытию молекулы C_{60}. Исследуя испарение графитового диска под действием импульсного лазерного облучения в атмосфере гелия и анализируя распределение образующихся углеродных кластеров по массам с помощью масс-спектрометра, они зафиксировали преобладание пика с массой в 720 а. е. Это означало не что иное, как самопроизвольное образование стабильной молекулы, состоящей из 60 атомов углерода (напомним, что масса одного атома углерода равняется 12 а. е.) [8].

Исследователи рискнули и ответили на наиболее сложный вопрос — как сконструировать молекулу C_{60} таким образом, чтобы все четыре электрона на внешней оболочке каждого атома углерода образовывали химические связи (или, как говорят химики, были «насыщены»). Команда Крото-Кёрла-Смолли (напомним, не зная о теоретических работах предшественников) предложила структуру усеченного икосаэдра (рис. 1) — многогранника, напоминающего по форме футбольный мяч и имеющего 32 грани (20 правильных шестиугольников и 12 правильных пятиугольников), 60 вершин (атомов углерода), и 90 ребер. В такой структуре положение всех атомов углерода полностью эквивалентно, а вот химические связи между атомами углерода могут быть двух типов (рис. 1г): (1) одинарная связь (C–C) представлена ребром, разделяющим шестиугольник и пятиугольник; (2) двойная связь (C=C) представлена ребром между двумя шестиугольниками.

Через 13 дней после начала экспериментов статья об открытии C_{60} [8] уже поступила в журнал «Nature». В статье было предложено название новой молекулы — *бакминстерфуллерен*, в честь американского архитектора Р. Бакминстера Фуллера, автора концепции *геодезических куполов* — поразивших мир зданий-многогранников (см. цветную вклейку) [9].

Предположение о структуре *бакминстерфуллерена* было в то время лишь гипотезой, напрямую подтвердить или опровергнуть которую могло бы только применение структурно-чувствительных методов например, спектроскопии ядерно-магнитного резонанса (ЯМР). Это стало возможным лишь в 1990 г. благодаря разработке объединенной группой Вольфганга Крёчмера и Дональда Хафмана способа получения макроскопических количеств C_{60} и его более крупных собратьев по семейству *фуллеренов* (C_{70}, C_{80}, и т. д.) [10]. Открытие Крёчмера-Хафмана обеспечило прорыв в получении фуллеренов в количествах, достаточных для применения структурно-чувствительных методов. Гипотеза о структуре *бакминстерфуллерена* была полностью подтверждена, что знаменовало собой рождение новой науки — химии, физики и материаловедения фуллеренов в виде тонких пленок и кристаллов с полупроводниковыми, металлическими и даже сверхпроводящими свойствами. В 1996 г. Нобелевская премия по химии была присуждена Крото, Кёрлу и Смолли за экспериментальное открытие фуллеренов.

4. Как теорема Эйлера помогла понять структуру молекул фуллеренов и углеродных нанокластеров

Важнейшим следствием из теоремы Эйлера, содержавшимся, кстати, уже в первой статье Эйлера [1] и имеющим прямое отношение к строению фуллеренов, является утверждение, что любой выпуклый многогранник обязательно имеет либо треугольные, либо четырехугольные, либо пятиугольные грани[2]. Это утверждение означает, в частности, что не существует выпуклого многогранника, у которого все грани были бы шестиугольниками. А это, в свою очередь, значит, что нельзя сконструировать молекулу углерода (также как и любую другую молекулу) со структурой многогранника только из шестиугольников, представляемых графитом в качестве строительного материала. Поэтому в молекуле C_{60} кроме шестиугольных присутствуют и пятиугольные грани. Последние необходимы для искривления плоской графитовой структуры и превращения ее в замкнутую оболочку.

Предположим теперь, что существует целое семейство углеродных молекул — фуллеренов в форме выпуклых многогранников, состоящих только из h шестиугольных и p пятиугольных граней (эта гипотеза о существовании семейства фуллеренов была высказана в работах [11], [12]. Тогда

$$\Gamma = p + h \qquad (2)$$

В то же время, поскольку каждое ребро принадлежит двум, а каждая вершина — трем соседним граням, то

$$2Р = 5p + 6h \tag{3}$$

и

$$3В = 5p + 6h \tag{4}$$

Домножив левую и правую части уравнения (2) на 6, уравнения (3) на –3, уравнения (4) на 2 и просуммировав, получаем

$$6(Г - Р + В) = p \tag{5}$$

Но, в соответствии с формулой Эйлера (1), Г — Р + В = 2, то есть

$$p = 12 \tag{6}$$

$$3В = 60 + 6h \tag{7}$$

или

$$В = 20 + 2h = 2(10 + h) \tag{8}$$

Мы пришли к удивительному, но полностью подтвержденному впоследствии результату — пятиугольных граней в любой из таких молекул может быть только 12! А вот число шестиугольных граней может варьироваться, при этом количество вершин многогранника (атомов углерода) всегда остается четным. Следуя этой логике, наименьшая молекула фуллерена, C_{20}, имеет форму додекаэдра (рис. 4) и состоит только из 12 пятиугольников. Следующий фуллерен — C_{24}[3], затем C_{26}, C_{28}, ... , C_{60}, C_{70}, $C_{2(10+h)}$ ...

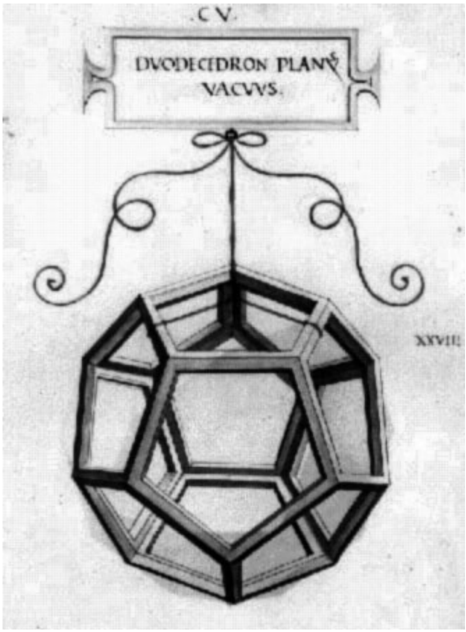


Рис. 4. Додекаэдр. Иллюстрация Леонардо да Винчи в книге Луки Пачоли «Божественная пропорция» (1509)

Прежде всего, формула (8) исчерпывающе объясняет преобладание кластеров углерода с четным числом атомов в масс-спектре на рис. 3. Распределение *магических* четных чисел в этом масс-спектре было обусловлено фуллеренами, каждый из которых обязан обладать четным числом атомов!

И все-таки, почему именно число 60 является *сверхмагическим*, а молекула C_{60} — самой стабильной из фуллеренов? В работах [11], [12] была предложена гипотеза, отвечающая и на этот вопрос[4]. Логика этого предположения была следующей. Искривление плоского гексагонального слоя требует введения в структуру пятиугольников; замыкание ее в сферу требует присутствия 12 пятиугольников (ни больше, ни меньше!). Но именно эти пятиугольники — места искривления, деформации структуры — являются источниками химической нестабильности. Из органической химии известно, например, что молекулы с ненасыщенными связями, в которых пятичленные кольца граничат друг с другом, чрезвычайно нестабильны. Следовательно, причину химической стабильности молекулы C_{60} можно объяснить довольно просто: это наименьший фуллерен, в котором пятиугольные грани изолированы друг от друга, они граничат только с шестиугольниками (рис. 1). Так было сформулировано *правило изолированных пятиугольников*: сверхмагической стабильностью обладают молекулы фуллеренов, в которых пятиугольные грани изолированы друг от друга. Следующей такой молекулой является C_{70}, в то время как ни один из промежуточных кластеров (C_{62}, C_{64}, C_{66}, C_{68}) не может быть замкнут без сопряжения пятиугольников. На основе этих результатов стал понятен факт постоянного присутствия пика C_{70} (со следующей после C_{60} интенсивностью) в экспериментальных масс-спектрах. Все складывалось в единую непротиворечивую картину, основанную на гипотезе о фуллеренах и теореме Эйлера.

Удовлетворяя правилу изолированных пятиугольников, молекула C_{70}, однако, менее стабильна химически, чем C_{60} (следовательно, ее самопроизвольное образование гораздо менее вероятно), так как она менее симметрична. Как отмечалось выше, все атомы в молекуле C_{60} эквивалентны, поэтому в ней отсутствуют особые точки, уязвимые для химического воздействия. Напряжение, возникающее за счет введения пятиугольников, абсолютно симметрично и однородно распределено по молекуле, что и предотвращает возникновение химически уязвимых точек. В молекуле C_{70} это требование уже не выполняется. Таким образом, секрет уникальности молекулы C_{60} заключается в выполнении правила изолированных пятиугольников и максимальной степени симметрии молекулы.

Позднее были обнаружены молекулы C_{78}, C_{84}, а также более крупные агрегаты вплоть до C_{200} (правда, их суммарное количество в смеси фуллеренов, полученных испарением графита, не превышает 1%). Возможно, будут получены и другие, более крупные аналоги. Теоретических ограничений для этого нет. Сконструировать гигантские фуллерены ($B >> 70$) можно различными способами. Например, можно увеличивать диаметр «геодезических куполов» с икосаэдральной симметрией. Некоторые из таких молекул показаны на рис. 5.

На рис. 5 отчетливо видно, что с увеличением числа атомов углерода форма молекул фуллеренов все более отклоняется от сферической к многогранной. Действительно, несмотря на огромное число шестиугольных ячеек в молекулах гигантских фуллеренов, число пятиугольников остается по-прежнему равным 12. Эти 12 «дефектных» пятиугольных ячеек располагаются в «вершинах» многогранника с широкими плоскими гранями, представляющими собой графитовую гексагональную сетку. Первым объяснил эту особенность структуры гигантских фуллеренов Крото в 1986 г. Вот как он вспоминает об этом в своей Нобелевской лекции:

«В один из дней я решил, что нам надо построить свои собственные купола а ля Бакминстер Фуллер или, точнее, молекулярные модели гигантских фуллеренов... Кен Мак Кей... принялся строить молекулы C_{240}, C_{540}, C_{960} и C_{1500} с икосаэдральной симметрией. Когда Кен вошел в комнату с моделью C_{540} это произвело потрясающее впечатление, однако я не мог до конца понять ее форму — модель

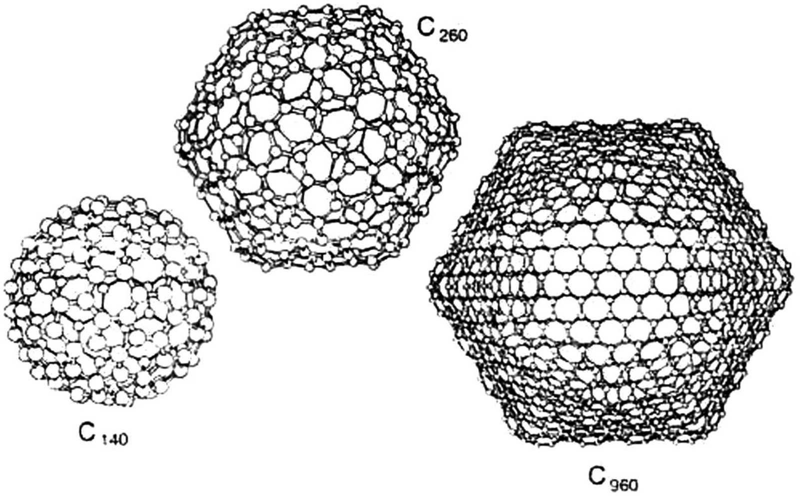


Рис. 5. Примеры гигантских фуллеренов
с икосаэдральной симметрией: C_{140}, C_{260}, C_{960}

не была круглой, как монреальский купол, построенный Бакминстером Фуллером, но имела явный вид икосаэдральной конструкции. Модель Кена имела выступы, обозначавшие положения 12 пятиугольников, и на большом расстоянии определенно выглядела как многогранник».

Тогда же Крото обратил внимание на тот факт, что Бакминстер Фуллер сознательно изменял длины стоек в окрестности пятиугольников в своих геодезических куполах, чтобы придать им более гладкую сфероидальную форму.

Сегодня понятно, что обнаруженные еще в 1980 г. японским ученым С. Иджимой (он же считается первооткрывателем углеродных нанотрубок)[5] концентрические кристаллические включения [13] — не что иное как *углеродные нанооньоны* («onion» — по-английски «луковица»), в которых различные фуллерены, начиная с C_{60} и до гигантских, с диаметром 30–70 Å, вложены друг в друга как матрешки или слои луковицы. Концентрические углеродные оболочки — не сферические, а многогранные. Отметим также, что работа Иджимы была опубликована за 5 лет до открытия C_{60} и является первым исследованием, где теорема Эйлера была применена для анализа результатов экспериментального изучения углеродных нано-структур.

Другой способ конструирования гигантских фуллеренов показан на рис. 6. Если «разрезать» молекулу C_{60} по экватору и присоединить кольцо из десяти атомов углерода, то получится «регбибол» C_{70} (рис. 6б). При добавлении еще десяти атомов образуется молекула C_{80} (рис. 8в). Теперь мысленно проделаем процесс такого добавления бесконечное число раз — получим углеродную нанотрубку (рис. 6г).

Нанотрубку можно сконструировать и по-другому, если «свернуть» в цилиндр с диаметром, равным диаметру C_{60}, гексагональный графитовый слой, а на два открытых конца образовавшейся трубки «надеть» по половинке молекулы C_{60}. Оба вышеописанных способа приводят к идентичным конструкциям, в том смысле, что они содержат 12 пятиугольников и практически бесконечное ко-

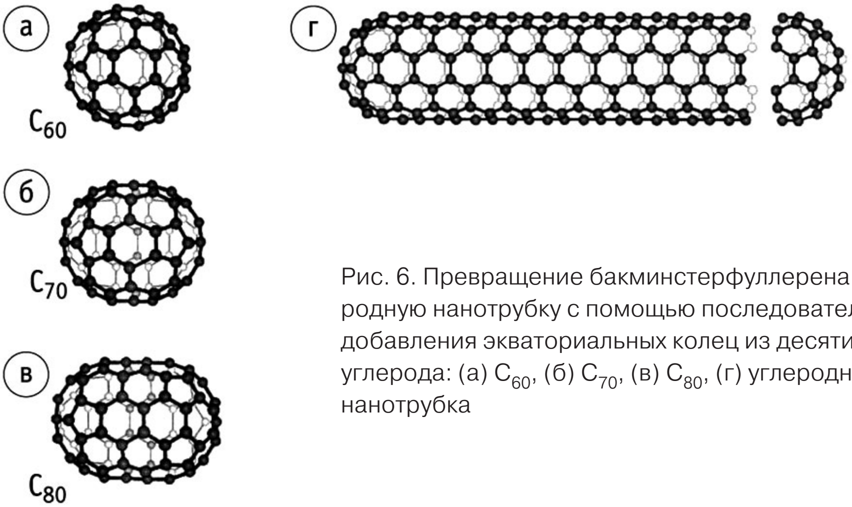


Рис. 6. Превращение бакминстерфуллерена в углеродную нанотрубку с помощью последовательного добавления экваториальных колец из десяти атомов углерода: (а) C_{60}, (б) C_{70}, (в) C_{80}, (г) углеродная нанотрубка

личество шестиугольников, то есть удовлетворяют теореме Эйлера и полностью подходят под определение молекулы фуллерена.

Сейчас мы уже можем сформулировать это определение достаточно точно:

Фуллеренами называются замкнутые многогранные молекулы чистого углерода, имеющие только пяти- и шестиугольные грани.

Открытие фуллеренов явилось своеобразным «золотым ключиком» в новый мир углеродных наноструктур. К настоящему времени, наряду с уже упоминавшимися углеродными нанотрубками и онионами, обнаружено большое количество различных углеродных кластеров с фантастическим разнообразием структуры и свойств. В том числе, получены фуллереноподобные структуры с отрицательной кривизной (рис. 7): тороидальные кластеры, кластеры в форме звездных многогранников, Y-разветвления углеродных нанотрубок (интерес к последним обусловлен их возможным применением в качестве элементов наноэлектронных схем). Во всех этих структурах в местах с отрицательной кривизной обнаружены *семиугольные грани.*

Формально кластеры, показанные на рис. 7, не являются фуллеренами. Их принято называть *фуллереноподобными кластерами* или дефектными фуллеренами, рассматривая в качестве топологических дефектов семиугольные грани.

Теоретически почти любая углеродная молекула или нанокластер, состоящая из пяти-, шести- и семиугольников, имеет право на существование. При этом шестиугольники «отвечают» за плоские «графитовые» участки, пяти- и семиугольники обеспечивают кривизну, являясь, в то же время, дефектами и источниками напряжений в структуре. Именно по этой причине, например, молекулы с $B < 60$, не удовлетворяющие правилу изолированных пятиугольников, химически нестабильны.

Чем меньше радиус молекулы, тем больше ее кривизна, и тем менее она стабильна. Поэтому молекулу C_{36}, состоящую в соответствии с формулой (8) из 12 пятиугольников и всего лишь 8 шестиугольников, получили только в 1998 г. после длительных экспериментов по подбору специальных условий испарения

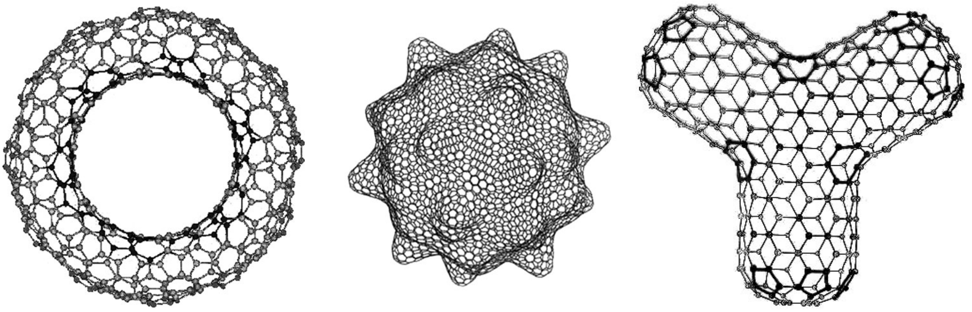

а б в

Рис. 7. Фуллереноподобные структуры с элементами отрицательной кривизны: а — тороидальные кластеры, б — кластеры в форме звездных многогранников, в — Y-разветвления углеродных нанотрубок. Стороны пятиугольников и семиугольников, обеспечивающие, соответственно, положительную и отрицательную кривизну, выделены

графита и кластеризации [14]. Минимальной стабильностью должен обладать наименьший фуллерен в форме додекаэдра, C_{20}, состоящий только из 12 пятиугольников (рис. 4). Действительно, эта молекула не образуется самопроизвольно при испарении графита ни при каких условиях эксперимента. И все-таки в сентябре 2000 г. группе немецких ученых удалось получить C_{20}, используя методы многоступенчатого органического синтеза [15].

5. Теорема Эйлера и фуллереноподобные структуры в живой природе

Структуры, подобные фуллеренам, использует и живая природа. Фуллереноподобной структурой с икосоэдральной симметрией обладают многие вирусы[6] и бактериофаги[7] (рис. 8).

В этом разделе мы приведем еще несколько примеров живых организмов и растений с фуллереноподобной структурой. В любом случае — будь то вирус, микроорганизм или даже творение человеческих рук, например, архитектурные сооружения — теорема Эйлера требует в такой структуре, наряду с произвольным числом шестиугольных граней, наличия 12 пятиугольных граней.

Применительно к углеродным молекулам этот вывод впервые сформулировал Д. Джонс в 1966 г. [4], проанализировав уравнение Эйлера (1). Однако Джонс лишь повторил анализ, изложенный в книге «Рост и форма» [16] выдающегося шотландского математика и биолога Д'Арси Томпсона (1860–1948). Поэтому мы имеем полное право утверждать, что получили уравнения (2)–(8) в наследство по цепочке «Эйлер-Томпсон-Джонс-Иджима-Крото...».

Автор книги «Рост и форма», по словам Г. Вейля, «сочетал в себе глубокое знание геометрии, физики и биологии с гуманитарной культурой и необычайно оригинальным даром проникновения в существо научных проблем». Именно благодаря этому редкому сочетанию качеств автора, книга «Рост и форма»,

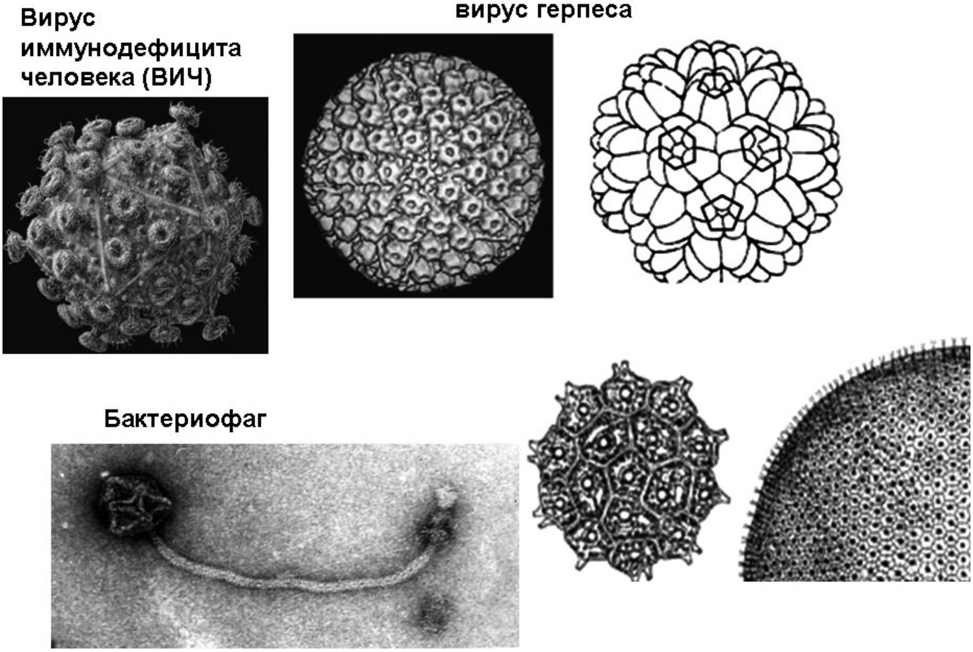


Рис. 8. Электронномикроскопические изображения вирусов и бактериофага с фуллереноподобной структурой

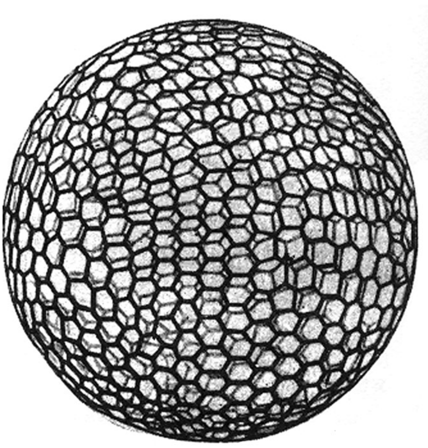
в которой впервые суммированы результаты применения математических и физических методов к исследованию объектов живой природы, стала настольной книгой для многих поколений читателей, и, в частности, оказала столь серьезное влияние на предмет нашего повествования. Изданная в 1917 г. издательством Кембриджского университета, эта книга была переиздана одним только этим издательством в 1942, 1952, 1959, 1963 и 1992 гг.

Томпсон применил теорему Эйлера и сделал вывод о необходимости введения 12 пятиугольных граней для формирования многогранных (или сфероподобных) объектов из преимущественно гексагональных «заготовок», анализируя форму скелета морских одноклеточных микроорганизмов — радиолярий.

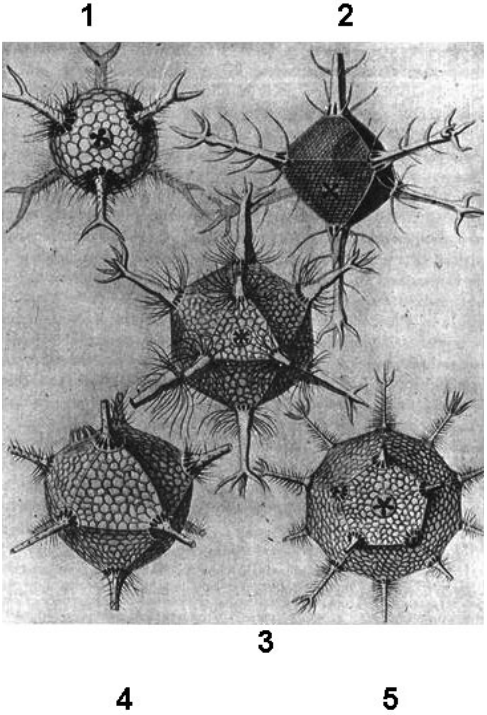
Радиолярии — планктонные организмы размером от 40 мкм до 1 мм (рис. 9). Эти поистине уникальные создания строят свой скелет из солей кремния, поглощаемых ими из морской воды. Из опыта повседневной жизни каждый из нас знает, что, когда делаешь что-либо самостоятельно, для себя и на свои средства, то, скорее всего, постараешься выполнить это самым эффективным и экономным способом.

Жизнь радиолярий протекает в «подвешенном» состоянии в морской воде, поэтому в строении их скелета легкость и прочность должны сочетаться с максимальной экономией материала, что и обеспечивается фуллереноподобной структурой. Эти же требования привели Бакминстера Фуллера к концепции *геодезической* структуры его зданий-куполов.

В своей книге Томпсон неоднократно использовал рисунки радиолярий, воспроизведенные им из книг «Красота форм в природе» [17] и «Челленджер-



а



б

Рис. 9. Рисунки радиолярий из книги Э. Геккеля «Челленджерский отчет». Воспроизводится по книге Д. Томпсона «Рост и форма». а — Aulonia hexagona; б — Circoporus sexfurcus (1), Circoporus Octahedrus (2), Circogonia icosahedra (3), Circospathis novena (4), Circorrhegma dodecahedra (5)

ский отчет» [18] немецкого естествоиспытателя и философа Эрнста Геккеля (1834–1919), который обладал также незаурядным талантом рисовальщика. Он проиллюстрировал свои книги огромным количеством рисунков микроорганизмов, выполненных с поразительной точностью. Только для «Челленджерского отчета», где он впервые описал 3508 разновидностей радиолярий, открытых им во время экспедиции на судне «Челленджер» в 1883–1887 гг., Геккель исполнил тысячи рисунков этих изящных микроорганизмов. Из рисунков, доставшихся нам по цепочке «Геккель-Томпсон...», следует, что, например, в скелете радиолярии, названной Геккелем Aulonia hexagona (рис. 9а), который представляет собой, на первый взгляд, совершенно правильную гексагональную сетку, некоторые ячейки имеют не шестиугольную, а пятиугольную форму. Зная теорему Эйлера, мы, вслед за Томпсоном, можем убедиться в том, что этих пятиугольников именно 12. Рис. 9б воспроизводит также состоящие из шестиугольных и пятиугольных ячеек скелеты пяти других радиолярий, названных Геккелем Circoporus sexfurcus (1), Circoporus Octahedrus (2), Circogonia icosahedra (3), Circospathis novena (4) и Circorrhegma dodecahedra (5). Рисунки 2, 3 и 5 представляют октаэдр, икосаэдр и додекаэдр изумительно правильной формы, что, кстати, было отражено Геккелем в названиях этих радиолярий.

В 1936 г. Д. Д. Мордухай-Болтовской[8] написал книгу «Геометрия радиолярий» [20]. Для изучения форм радиолярий и других простейших организмов автор с успехом использовал теорию многогранников, которой он занимался в течение всей своей жизни; кроме того, он использовал элементы вариационного исчисления, топологию и дифференциальные уравнения. «Геометрия радиолярий» поражает тщательностью проработки проблемы и мощью математического арсенала автора. Первая глава второй части книги, названная «Ситуационная геометрия радиолярий», посвящена анализу структуры скелетов радиолярий с использованием теоремы Эйлера и содержит все соображения, приведенные нами выше с помощью уравнений (1)–(8). Параграф 5 этой главы называется «Теорема Эйлера и непосредственные следствия из нее». Следующие два параграфа распространяют эти следствия на случаи правильных, полуправильных и неправильных тел.

И, наконец, нельзя не упомянуть фуллереноподобные структуры в растительном мире. Чрезвычайно интересна, с этой точки зрения, морфология зеленых водорослей семейства вольвоксовых (Volvocaceae), образующих сферические колонии клеток диаметром от долей миллиметра до нескольких миллиметров. При этом клетки так плотно скреплены плазмодесмами, тянущимися от ядра к ядру, что колонии при ближайшем рассмотрении оказываются фуллереноподобными полиэдрами [19].

В [19] морфологическое сходство фуллеренов, скелетов радиолярий и колоний вольвоксовых водорослей рассматривается как пример *биоминеральной гомологии*, т. е. приобретения общих черт существенно различными химическими, минералогическими и биологическими объектами, действующими согласно сходным внутренним программам, минимизируя энергетические и материальные затраты. Механизмы реализации биоминеральных гомологий, безусловно, требуют дальнейших исследований. Это направление тем более актуально, что может быть использовано при поиске путей создания биоорганизмов, построенных полностью из органических компонентов небиологической природы. То есть, фактически, речь идет о создании искусственной жизни.

6. Заключение

В настоящей статье в контексте истории открытия фуллеренов предложен анализ их молекулярной структуры, на основе теоремы Эйлера о многогранниках. Удивительно, но именно применение теоремы Эйлера в конце XX века помогло первооткрывателям молекулы C_{60} глубже понять результаты своих экспериментов и сформулировать гипотезу о фуллеренах. Показано также, что основанные на теореме Эйлера геометрические принципы могут быть положены в основу анализа самых разных фуллереноподобных структур — от вирусов и микроорганизмов до архитектурных сооружений.

Примечания:

[1] Формула Эйлера выполняется не только для выпуклых многогранников, и даже не только для многогранников. Например, нарисуем на сфере любой *связный граф*, т. е. возьмем несколько точек (вершин) и соединим часть их линиями (ребрами) так, чтобы из любой вершины можно было бы по ребрам перейти в любую другую. Подсчитаем число образовавшихся «граней» — фрагментов, на которые линии разрезают сферу: число граней будет связано с числом вершин и ребер тем же соотношением. Величина В–Р+Г, называемая *эйлеровой характеристикой*, будет равна двум для всех многогранников,

«устроенных как сфера», — они, образно говоря, превратятся в шарик, если их сделать из резины и надуть. А вот для *тора* эйлерова характеристика равна нулю; для многогранников, имеющих g сквозных дыр, она равна 2–2g; для любого семейства пересекающихся прямых на плоскости — единице (в последнем случае под вершинами понимаются точки пересечения прямых; под гранями — части, на которые прямые разбивают плоскость; под ребрами — части, на которые прямые делятся вершинами).

[2] Этот вывод следует непосредственно из формулы (1). Действительно, для шестиугольной сетки 2Р = 6Г (каждое ребро принадлежит двум соседним шестиугольным граням), то есть Р = 3Г. В то же время, 3В = 6Г (каждая вершина принадлежит трем сходящимся в ней ребрам), то есть В = 2Г, или Г–Р+В=Г–3Г+2Г=0.

[3] Топологический анализ показывает, что невозможно сформировать фуллереноподобную структуру из 22 атомов углерода (p=12, h=1). Впервые вопрос о возможном количестве шестиугольных граней в выпуклом многограннике, имеющем *только* шестиугольные и пятиугольные грани, был сформулирован в конце 50-х годов XX века выдающимся канадским математиком Д. Коксетером. Ответ на этот вопрос был найден в 1963 г. Б. Грюнбаумом и Т. Моцкиным [22]: любые значения h > 1 имеют право на существование.

[4] В то время предложенное объяснение безусловно было только гипотетическим. Крото утверждал [23], что он познакомился с теоремой Эйлера благодаря статьям Д. Джонса [4] и книге Д'Арси Томпсона «Рост и форма» [16]. Кёрл же вспоминает [24], что они со Смолли узнали о теореме Эйлера из статьи [25]. Для нас важно, что оба эти события, также как и публикация статей [11],[12] состоялись во временном промежутке между 1985 и 1990 гг., т. е. после открытия молекулы C_{60}, но до подтверждения гипотезы о ее структуре (вследствие работы Крёчмера-Хафмана [10]).

[5] Автор не разделяет широко распространенную точку зрения, что углеродные нанотрубки были открыты в 1991 г. С. Иджимой. О приоритете открытия углеродных нанотрубок см. в [3].

[6] Вирусы — это мельчайшие организмы размером от 20 до 500 нм. На вопрос, являются ли вирусы живыми, нет однозначного ответа. Если живой считать структуру, которая обладает генетическим материалом (ДНК или РНК) и способна воспроизводить себя, то можно сказать, что вирусы живые. Если же живой считать структуру, обладающую клеточным строением, то ответ должен быть отрицательным. Иначе говоря, вирусы находятся на самой границе между живой и неживой природой.

[7] Бактериофаг (от греческого «фагос» — пожирать, буквально — пожиратель бактерий) — вирус, избирательно вызывающий разрушение бактерий. Частицы бактериофагов состоят из *головки* диаметром 45–140 нм и отростка-хвоста, диаметром 10–40 и длиной 100–200 нм. Головки многих бактериофагов имеют форму правильного икосаэдра или иной фуллереноподобной частицы с икосаэдральной симметрией. Присутствие бактериофагов в крови человека совершенно безвредно. Поэтому одной из областей их использования является антибактериальная терапия, альтернативная приему антибиотиков.

[8] Д. Д. Мордухай-Болтовской (1876–1952) — выдающийся математик, механик, педагог, оригинальный и независимый философ (по всей вероятности, один из последних представителей блестящей плеяды русских философов-идеалистов), автор русского перевода и подробных комментариев к «Началам» Евклида (два издания, 1948 и 1950 гг.) и математическим рукописям Ньютона.

Литература:

1. *Euler L.* Elementa doctrinae solidorum // N. Comm. 1758. Vol. 4. P. 109–140.

2. *Euler L.* Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita // Ibid. P. 140–160.

3. *Кац Е. А.* Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры: родословная форм и идей. М.: Издательство ЛКИ, 2008.

4. *Jones D. E. H.* // New Scientist. 1966. Vol. 32. C. 245.

5. *Osawa E.* Superaromaticity // Kagaku. 1970. Vol. 25. P. 854–863 (на японском яз.).

6. *Бочвар Д. А., Галперн Е. Г.* О гипотетических системах: карбододекаэдре, 8-икосаэдре и карбо-8-икосаэдре // Доклады АН СССР. 1973. Т. 209. Вып. 3. С. 610–612.

7. *Rohlfing E. A., Cox D. M., Kaldor A.* Production and characterization of supersonic carbon cluster beams // J. Chem. Phys. 1984. Vol. 81. P. 3322–3330.

8. *Kroto H. W, Heath J. R., O'Brien S. C., Curl R. F., Smalley R. E.* C_{60} — Buckminsterfullerene // Nature. 1985. Vol. 318. P. 162–163.

9. *Кац Е. А.* Энергетическая геометрия Бакминстера Фуллера: от молекул и вирусов до геодезических куполов // Энергия: экономика, техника, экология. 2002. Вып. 5. С. 49–54.

10. *Kratschmer W., Lamb L. D., Fostipoulos K., Huffman D. R.* Solid C_{60} — a new form of carbon // Nature. 1990. Vol. 347. P. 354–358.

11. *Schmalz T. G., Seitz W. A., Klein D. J., Hite G. E.* C_{60} carbon cages // Chem. Phys. Lett. 1986. Vol. 130. P. 203–207.

12. *Kroto H. W.* The stability of the fullerenes C_{24}, C_{28}, C_{32}, C_{36}, C_{50}, C_{60} and C_{70} // Nature. 1987. Vol. 329. P. 529–531.

13. *Iijima S.* Direct observation of the tetrahedral bonding in graphitized carbon-black by high resolution electron microscopy // J. Cryst. Crowth. 1980. Vol. 50. P. 675–683.

14. *Piskoti C., Yarger J., Zettl A.* C_{36}, a new carbon solid // Nature. 1998. Vol. 393. P. 771–774.

15. *Prinzbach H., Weiler A., Landenberger P., Wahl F., Wörth J., Scott L., Gelmont M., Olevano D., Issendorff B.* Gas phase production and photoelectron spectroscopy of the smallest fullerene, C_{20} // Nature. 2000. Vol. 407. P. 60–63.

16. *Thompson D'A. W.* On growth and form. Cambridge: Cambridge University Press, 1917.

17. *Геккель Э.* Красота форм в природе / Пер. с немецкого. СПб.: Просвещение, 1907.

18. *Haeckel E.* Report on the Radiolaria collected by H. M. S. Challenger during the years 1873–1876. Rep. Sci. Results // Zoology. 1887. Vol. 18. 2 parts.

19. *Войцеховский Ю. Л.* О кристаллах, полиэдрах, радиоляриях, вольвоксах, фуллеренах и немного — о природе вещей // Природа. 2004. Вып. 8. С. 8–18.

20. *Мордухай-Болтовской Д. Д.* Геометрия радиолярий // Ученые записки Ростовского ун-та. 1936. Вып. 8. С. 1–91.

21. http://pyrkovve.narod.ru/index.html

22. *Grunbaum B., Motzkin T. S.* The number of hexagons and the simplicity of geodesics on certain polyhedra // Canadian Journal of Mathematics. 1963. Vol. 15. P. 744–760.

23. *Кромо Г.* Симметрия, космос, звезды и C_{60}. Нобелевская лекция // Успехи физических наук. 1996. Т. 168. Вып. 3. С. 343–359.

24. *Кёрл Р. Ф.* Истоки открытия фуллеренов: эксперимент и гипотеза. Нобелевская лекция // Там же. 332–338.

25. *Haymet A. D. J.* Footballene — a theoretical prediction for the stable, truncated icosahedral molecule C_{60} // J. Am. Chem. Soc. 1986. Vol. 108. P. 319–321.

А. С. Захаров, В. В. Николаева
Санкт-Петербург, Россия

Леонард Эйлер и первые общества страхования жизни в России (о причинах появления работ Л. Эйлера по страхованию жизни в 1776 г.)

Abstract: The hitherto unknown episode in the life of academician L. Euler is revealed: his examination of the proposal of the death insurance at St. Ekaterine Lutheran church in St. Petersburg in 1775. This was the origin of clauses which were subsequently included in the book "Éclaircissemens sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts, avec la description d'une nouvelle espèce de Tontine aussi favorable au Public, qu'utile à l'Etat" (E473). It is confirmed that Euler was indeed the author of these clauses. It is shown, that in Russia in the second half of the XVIII century such companies were already coming into existence. Thus, the history of personal insurance in Russia can be rewritten with, as its starting point, not 1835 or later, but the years 60–70 of the previous century.

Среди многочисленных областей человеческой деятельности, в которые внес вклад Леонард Эйлер, есть и теория страхования жизни. В XVIII веке в Европе формировались основы системы личного страхования. Этому способствовали развитие теории вероятностей и составление таблиц смертности. Возрос интерес к вопросам рождаемости, смертности, средней продолжительности жизни. Естественно, что эти проблемы не могли остаться вне поля зрения великого математика. В 1760-х годах в Берлине были опубликованы его работы «Sur les rentes viagères» («О пожизненных рентах») [1] и «Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain» («Общие исследования о смертности и умножении человеческого рода») [2]. Перу Эйлера принадлежит [3, с. 21] сочинение «Nöthige Berechnung zur Einrichtung einer Wittwenkasse» («Необходимые вычисления к учреждению вдовьей кассы») [4], напечатанное в 1770 г. в «Neues Hamburgisches Magazin».

В середине 1776 г. в Петербурге вышла в свет книга на французском языке: «Éclaircissemens sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts, avec la description d'une nouvelle espèce de Tontine aussi favorable au Public, qu'utile à l'Etat» («Разъяснения об общественных учреждениях в пользу вдов и на случай смерти, с описанием нового вида тонтины, благоприятного для публики и полезного для государства») [5]. Под общей обложкой этого издания находятся работы: «D'un établissement public pour payer des pensions à des veuves, fondé sur les principes les plus solides de la probabilité» («Об общественном учреждении для выплаты пенсий вдовам, основанном на наиболее надежных принципах вероятности») и «Sur l'établissement d'une caisse pour les morts» («Об учреждении кассы на случай смерти»), а также план нового вида тонтины. В заголовке книги значится: «Calcules sous la direction de Monsieur Léonard Euler. par Mr. Nicolas Fuss. Adjoint de l'Académie Impériale des Sciences» («Вычислены под руководством господина Леонарда Эйлера господином Николасом Фуссом, адъюнктом Императорской Академии наук»). Очевидно, данная фраза, а также, разбивающие ее точки, которыми завершается каждая строка на титульном листе книги, способствовали возникновению досадной путаницы в отношении авторства этого произведения: в настоящее время его можно встретить и как работу Л. Эйлера, и как работу Н. Фусса. В списке Г. Энестрёма это сочинение Эйлера имеет порядковый номер 473. Оно вошло в седьмой том первой серии его Полного собрания сочинений (Opera omnia) [6], присутствует в первом томе издания «Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР» [7, с. 371], не говоря уже о статье В. В. Паевского «Демографические работы Леонарда Эйлера» [8]. В то же время в каталогах целого ряда уважаемых отечественных и зарубежных библиотек[1] данная книга присутствует как произведение Николая Фусса. Его авторство отстаивают и некоторые исследователи [9, с. 19–20].

Кто же прав? Архивный поиск показал, что в документах Канцелярии Академии наук за май–август 1776 г. названные публикации именуются сочинениями «господина академика Эйлера старшего», то есть Леонарда Эйлера. Приведем три документа, общее содержание которых дает ответ на все вопросы. Первый датирован 4 мая 1776 г.: «Фактору Лыкову приказать, чтоб он сообщенных от собрания академического двух на французском языке г. академика Эйлера старшего — сочинений, одного под заглавием *D'un établissement public pour payer des pensions à des veuves etc.*, а другаго *Sur l'établissement d'une caisse pour les morts*, напечатал каждаго по шести сот экземпляров...» [10]. Как видим, формулировка исключает какие-либо сомнения относительно того, кто был автором этих работ.

Из второго документа от 11 июля 1776 г. следует, что к этой дате поименованные выше сочинения академика Эйлера старшего были отпечатаны под общим заголовком: «Éclaircissemens sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts avec la déscription d'une nouvelle espèce de tontine aussi favorable au public qu'utile á l'état». Подписали этот документ: Сергей Домашнев, Я. Штелин, Семен Котельников, Степан Румовский, Протасов [11].

И, наконец, третий документ — о выдаче авторских экземпляров этого издания, датированный 22 июля 1776 г., окончательно расставляет все точки над i. В нем прямо говорится: «Комиссару Зборомирскому приказать, чтоб он выдал г. академику Леонгарду Эйлеру, яко сочинителю в награждение напечатанных на французском языке двух его диссертаций *Éclaircissemens sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts, etc.* двенадцать экземпляров... да адъюнкту Фусу за приложенные им труды при сочинении оных Диссертаций шесть экземпляров...» [12]. Роль Николая Фусса, в данном случае, очевидно, сводилась к записи мыслей Эйлера и к осуществлению трудоемких вычислений, как это и указано в заголовке книги[2]. Таким образом, на основе этих документов авторство Леонарда Эйлера можно считать доказанным.

Есть и еще одно доказательство — свидетельство самого Н. Фусса. Участие в подготовке эйлеровских трудов, о которых говорилось выше, позволило ему разработать «Entwurf einer allgemeinen Leihe=Bank wo nicht nur Kapitalien zu gewissen Zinsen sowol ausgelehnt als angenommen, sondern auch zugleich andere verschiedene Anstalten als Leibrenten, Sterbe- und Wittwen-Kassen damit verbunden werden können, berechnet durch N. Fuss» («Проект всеобщего заемного банка, где не только дают взаймы и принимают капиталы под определенные проценты, но могут одновременно находиться и другие, связанные с ним учреждения, такие, как кассы по выплате пожизненных рент, смертные и вдовьи кассы») [13]. В этой работе Фусс прямо указывает на Эйлера как автора [5]. Рукопись Фусса поступила в типографию Академии наук 13 июня 1776 г. (менее чем через полтора месяца после рукописи работ Эйлера) [14], а к концу октября была напечатана на немецком языке. Не исключено, что академик сам посоветовал ученику написать эту работу и, в свою очередь, помог в ее подготовке. Основные положения данного проекта базируются на выкладках Эйлера, частично преобразованных в табличную форму, более удобную для практического использования. Фусс отмечал большую выгоду, которую дают «заемные банки и различные вдовьи попечительские учреждения, смертные кассы, тонтины, пожизненные ренты и другие учреждения» и подчеркивал важность использования достижений науки при их создании.

Что же побудило Эйлера в 1776 году вернуться к теме вдовьих и похоронных касс? Ведь если обратиться к истории страхового дела, то получается, что в XVIII веке никакого личного страхования в России не было, и, следовательно, академик не мог рассчитывать на практическое применение своих рекомендаций.

Наши исследования показали, что распространенное мнение, будто личное страхование в России появилось едва ли не во второй половине XIX в., нельзя признать верным. Уже в XVIII столетии в России, как и в Западной Европе, стали возникать простейшие страховые организации, которые с течением времени становились совершеннее и разнообразнее. В первую очередь, это были небольшие похоронные кассы, в которых преимущественно участвовали проживавшие в России иностранцы (большей частью немцы). Известно, что уже в 1733 г. такая касса действовала в Риге. В 1764–1767 гг. похоронные кассы открылись в Петербурге. В 70-х годах XVIII в. в разных городах Российской империи, в частности, в Петербурге, Москве, Риге, возникают новые похоронные кассы и подобные им организации [14]. В 1772 г. на одобрение Екатерины II был представлен проект Вдовьей казны при Воспитательном доме, разработанный действительным тайным советником И. И. Бецким [15]. В 1776 г. известный немецкий ученый, географ и пастор Антон Фридрих Бюшинг писал в издававшихся им «Еженедельных сообщениях...»: «...в этом большом городе (Санкт-Петербург — *А. З.*) уже несколько лет создают общества для оплаты расходов на похороны их умерших членов, которые (общества — *А. З.*) в Германии многочисленны и... принадлежат к самым полезным учреждениям» [16, с. 286]. Приведенных примеров достаточно, дабы утверждать, что историю личного страхования в России следует вести с 60–70-х годов XVIII века.

Но вернемся к Леонарду Эйлеру. В первой половине 1775 г. к нему обратился его близкий друг — пастор лютеранской церкви св. Екатерины на Васильевском острове в Санкт-Петербурге Иоахим Грот. При церкви планировалось открыть Общество на смертные случаи, и Грот просил академика рассмотреть проект его устава.[3] Хорошо образованный и весьма передовой человек своего времени, пастор Грот понимал необходимость научного подхода к организации подобных объединений. Кто, как не великий Леонард Эйлер, которого, по определению Грота, современники «гораздо выше почитать должны, нежели Британцы Невтона во свое время», мог дать квалифицированную оценку принципам, на которых собирались организовать Общество? Идея Общества на смертные случаи весьма сходна с идеей похоронных касс. В нем должно было состоять 550 членов, которые в случае смерти кого-либо из них платили бы по два рубля. 1000 руб. из собранной суммы следовала для выплаты наследникам умершего, а из оставшихся

100 руб. одна половина предназначалась церкви, а другая шла на организационные расходы. Проект устава Общества был разработан двумя авторами, одним из которых был пастор И. Грот. Он и передал проект на рецензию Л. Эйлеру.

Академик в целом одобрил устав, хотя и высказал ряд существенных замечаний. Главное из них заключалось в том, что при избранной схеме сбора денег в выигрыше оказывался тот, кто раньше умрет, так как он успевал принять участие в малом числе складчин. Поскольку сумма выплат наследникам была фиксирована, то чем дольше человек состоял в Обществе, тем больше денег он вносил на смертные случаи. Со временем у кого-то могла возникнуть ситуация, когда сумма его взносов превышала бы сумму выплаты наследникам, т. е. создавалась проблема переплат. Заключение Эйлера нашло энергичного оппонента в лице Грота. В результате, в основу деятельности Общества на смертные случаи, начавшего работу 3 (14) июня 1775 г., была положена схема, о несовершенстве которой предупреждал Эйлер. Вероятно, такое упорство побудило академика продолжить полемику иным способом, т. е. опубликовать работу с изложением научного подхода к созданию подобных обществ. Это и привело к появлению «Éclaircissemens sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts...» [5]. Статьи, которые вошли в него, охватывают очень актуальные для своего времени вопросы личного страхования. В них великий математик показывает, как на основе принципов теории вероятности создать учреждение для выплаты пенсий вдовам, или кассу на случай смерти, или новую тонтину, чтобы они были надежны и справедливы. Необходимость и возможность обеспечения строгой справедливости в деятельности таких организаций неоднократно подчеркивал Л. Эйлер. Как отмечал Николай Фусс, «Éclaircissemens sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts...» была первой публикацией, где излагался весь комплекс принципов, на которых должны основываться вдовьи и смертные кассы, чтобы быть выгодными как учредителям, так и публике. В ней нашли отражение результаты размышлений Л. Эйлера об усовершенствовании организации подобных учреждений. По определению Фусса, она заключала в себе все, что «счет вероятностей важного в себе содержит» [17].

Чтобы убедиться в правильности нашего вывода о причинах создания [5], достаточно прочитать первый параграф ее второй части: «Sur l'établissement d'une caisse pour les morts». «Вот уже некоторое время много говорят, — пишет Эйлер, — о таком учреждении, которое должно состоять из 550 членов, из которых каждый обязан оплачивать в кассу два рубля каждый раз, когда кто-либо из членов этого учреждения умрет, чтобы давать наследникам умершего сумму в 1000 рублей, в то время как остаток будет использоваться на содержание церкви и необходимые расходы, которых такое учреждение требует». Как видим, и численность организации, и размер взносов на смертные случаи, и принцип распределения собранной суммы показывают, что речь идет об Обществе пастора Грота, хотя прямо оно не называется. Это подтверждают и формулировки, которые использует академик. На момент, когда Эйлер готовил данную статью, Общество существовало всего около 10 месяцев и насчитывало менее 100 членов, поэтому в статье говорится «должно состоять из 550 членов», а не «состоит». Но Общество работало! Наследники первого скончавшегося уже получили хоть и небольшую, но реальную сумму [14]. Слухи и разговоры об Обществе ходили по Петербургу. Отсюда: «Вот уже некоторое время много говорят».

Чтобы наглядно показать проблемы, с которыми такая организация столкнется со временем, академик приводит результаты расчета (данный расчет, преобразованный в табличную форму, см. в табл. 1), в основе которого лежит допущение, что Общество начинает функционировать полностью сформированным из ровесников, все по 30 лет, а места умерших занимают лица одинакового с ними возраста. Таким образом, все члены Общества стареют в одно и то же время, смертность среди них постоянно возрастает, и число выплат наследникам с каждым годом увеличивается. В результате через 40 лет от первого набора останется 190 человек в возрасте семидесяти лет, каждый из которых за эти годы внес 1006 руб. на смертные случаи. Поскольку, согласно уставу Общества, наследникам полагается 1000 руб., потери каждого из них составят 6 руб. В следующие 10 лет Общество потеряет 324 чел., а выплаты по складчинам составят 648 руб. Оставшиеся от первого набора 78 чел. к этому времени внесут по складчинам по 1654 руб. Причем надежды на получение даже полагающейся 1000 руб. у них не будет, так как пополнить Общество восьмидесятилетними членами в количестве 226 чел., скорее всего, не удастся.

Эйлер не был бы Эйлером, если бы ограничился только демонстрацией недостатков данной схемы. Он отмечает, что его намерение состоит не в том, чтобы отклонить кого-либо из тех, кто захочет войти в это Общество, от их похвального намерения, так как речь идет об общественном благе и интересах церкви. Но он хочет «сообщить обо всех несообразностях, чтобы разработать новый план такого учреждения, которое было бы основано на наиболее надежных принципах вероятности, дабы никто не имел оснований жаловаться, что он израсходовал на Общество чересчур много или чересчур мало, так как каждый внесет, сразу или последовательно, взнос, размер которого зависит от суммы, каковая будет выплачена, можно надеяться, наследникам после его смерти, и который будет определен по строжайшему закону справедливости».

Для этого Л. Эйлер ставит следующую задачу: человек возраста *a* вступает в Общество и хочет, чтобы после его смерти наследники получили установленную в нем денежную сумму. Требуется определить, сколько денег он должен вносить в кассу Общества, если хочет платить единовременно или ежегодно, при условии, что известен процент, который можно получить на отдаваемый в рост капитал.

Таблица 1.

Возраст	Осталось от первого набора (чел.)	Смертность за 10 лет (чел)		Выплаты по складчинам за 10 лет (руб.)	Сумма выплат (руб.)	Прибыль наследников от первого набора (руб.) 1000 – (VI)
		Всего	От первого набора (III)x(II)/550			
I	II	III	IV	V	VI	VII
30	550	–	–	–	–	–
40	469	81	81	162	162	838
50	393	89	76	178	340	660
60	296	135	96	270	610	390
70	190	198	107	396	1006	–6
80	78	324	112	648	1654	–654
Сумма	–	–	472	1654	–	–

Как же решает эту задачу Л. Эйлер? Двигаясь, по своему обыкновению, от частного к общему, он рассматривает Общество, в которое одновременно вошли N человек одинакового возраста a. После смерти любого из них Общество выплачивает наследникам 100 рублей. При вступлении каждый платит в кассу x рублей, и таким образом основной капитал Общества на начало первого года его работы составляет xN рублей. Через год от первоначальной численности N останется $\frac{(a+1)}{(a)}N$ человек[4]. Число скончавшихся в течение этого года будет $\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)N$. Тогда сумма выплат наследникам умерших в первый год составит

$$100\cdot\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)N.$$

Для пополнения кассы каждый из оставшихся членов Общества делает взнос z рублей, что в сумме составит

$$\frac{(a+1)}{(a)}N\frac{z}{\lambda},$$

где λ — коэффициент, учитывающий проценты приращения капитала (при приращении 5% λ=1,05, при 6% λ=1,06 и так далее).

Аналогичным образом Эйлер рассматривает второй, третий и четвертый годы существования Общества. Для компактности и лучшей наглядности представим эти выкладки в табличной форме (см. таблицу 2).

Этих примеров достаточно, чтобы понять принцип изменения каждого из рассматриваемых параметров. Пополнение кассы Общества ежегодными взносами можно выразить так

$$\frac{Nz}{(a)}\left(\frac{(a+1)}{\lambda}+\frac{(a+2)}{\lambda^2}+\frac{(a+3)}{\lambda^3}+\frac{(a+4)}{\lambda^4}+\frac{(a+5)}{\lambda^5}+\ldots\right)$$

Чтобы привести это выражение к более компактной форме, Эйлер обозначает выражение в скобках как

$$P=\frac{(a+1)}{\lambda}+\frac{(a+2)}{\lambda^2}+\frac{(a+3)}{\lambda^3}+\frac{(a+4)}{\lambda^4}+\frac{(a+5)}{\lambda^5}+\ldots$$

Тогда формула полного дохода кассы будет выглядеть так

$$Nx+\frac{NPz}{(a)}. \tag{1}$$

Сумма выплат наследникам (из расчета 100 рублей за умершего) будет представлена следующим выражением

$$\frac{100N}{(a)}\left((a)-(a+1)+\frac{(a+1)-(a+2)}{\lambda}+\frac{(a+2)-(a+3)}{\lambda^2}+\frac{(a+3)-(a+4)}{\lambda^3}+\ldots\right).$$

Преобразуя это выражение, Эйлер приводит его к виду

$$\frac{100N}{(a)}\left((a)+(1-\lambda)P\right). \tag{2}$$

Таблица 2.

Год работы Общества	Первый год	Второй год	Третий год	Четвертый год
Число членов Общества на начало года	N	$\frac{(a+1)}{(a)}N$	$\frac{(a+2)}{(a)}N$	$\frac{(a+3)}{(a)}N$
Число членов Общества на конец года	$\frac{(a+1)}{(a)}N$	$\frac{(a+2)}{(a)}N$	$\frac{(a+3)}{(a)}N$	$\frac{(a+4)}{(a)}N$
Число скончавшихся за год членов Общества	$\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)N$	$\left(\frac{(a+1)-(a+2)}{(a)}\right)N$	$\left(\frac{(a+2)-(a+3)}{(a)}\right)N$	$\left(\frac{(a+3)-(a+4)}{(a)}\right)N$
Сумма выплат наследникам за этот год	$100\left(1-\frac{(a+1)}{(a)}\right)N$	$\frac{100}{\lambda^2}\left(\frac{(a+1)-(a+2)}{(a)}\right)N$	$\frac{100}{\lambda^2}\left(\frac{(a+2)-(a+3)}{(a)}\right)N$	$\frac{100}{\lambda^3}\left(\frac{(a+3)-(a+4)}{(a)}\right)N$
Сумма взносов за этот год	$\frac{(a+1)}{(a)}N\frac{z}{\lambda}$	$\frac{(a+2)}{(a)}N\frac{z}{\lambda^2}$	$\frac{(a+3)}{(a)}N\frac{z}{\lambda^3}$	$\frac{(a+4)}{(a)}N\frac{z}{\lambda^4}$

Далее, руководствуясь тем, что доходы кассы Общества должны быть равны его расходам, он приравнивает выражения (1) и (2):

$$Nx+\frac{NPz}{(a)}=\frac{100N}{(a)}\big((a)+(1-\lambda)P\big).$$

Разделив обе части этого равенства на N и умножив на (a), Эйлер получает итоговое уравнение

$$(a)x+Pz=100\big((a)+(1-\lambda)P\big).$$

Оно позволяет «определить надлежащим образом» оба неизвестных x и z. Причем, как видим, оба неизвестных оказываются не связанными с N. «Нет необходимости, — указывал академик, — чтобы в таком Обществе состояло определенное число людей, хотя желательно, чтобы численность была достаточно значительной, дабы принципы вероятности работали более точно».

Позволим себе заменить в уравнении Эйлера выбранные им для примера 100 рублей на K. Тогда уравнение примет более общий вид:

$$a(x)+Pz=K((a)+(1-\lambda)P). \qquad (3)$$

У вступающих в Общество есть три варианта уплаты взносов:

Сразу уплатить все, что необходимо, и быть свободным от взносов до самой смерти; в этом случае $z = 0$.

Платить пожизненно каждый год одинаковую сумму; в этом случае $x = z$.

При вступлении уплатить часть полного взноса, предусмотренного в первом варианте, и затем ежегодно платить сумму меньшую, чем во втором варианте; в этом случае размер x определяет сам вступающий, остается определить z.

Таким образом, как и отмечает Л. Эйлер, расчет сводится к поиску значений величины P для каждого возраста a. Чтобы сделать этот расчет более удобным, он изменил последовательность членов суммы P, начав ее с последнего слагаемого, которое принял соответствующим возрасту 95 лет:

$$P=\frac{(95)}{\lambda^{95-a}}+\frac{(94)}{\lambda^{94-a}}+\frac{(93)}{\lambda^{93-a}}+\ldots+\frac{(a+1)}{\lambda},$$

и, вынеся за скобки $\frac{1}{\lambda^{95-a}}$, получил:

$$P=\frac{1}{\lambda^{95-a}}\big((95)+(94)\lambda+(93)\lambda^2+(92)\lambda^3+\ldots+(a+1)\lambda^{94-a}\big).$$

В конце работы приведена таблица значений x и z для оплаты, соответственно, по первому и второму вариантам, в зависимости от возраста человека, при условии, что прирост капитала составляет 5%, а наследникам выдается по 100 рублей за скончавшегося. Данные этой таблицы, трудоемкими расчетами которых занимался, очевидно, Н. Фусс, носят скорее демонстрационный характер. Для нахождения $(a+1)$, $(a+2)$, $(a+3)$, ... (95) использовалась таблица смертности, составленная В. Керсебумом[5], к которой Л. Эйлер обращался и ранее, в частности при подготовке работы [4]. Еще тогда он отмечал, что эта таблица «не отражает истинного положения дел, так как смертность для мужчин и для женщин различна, и поэтому пользование общей таблицей смертности может привести к значительным ошибкам» [18].

Кажется, великий математик сделал все, чтобы помочь своему другу организовать Общество на смертные случаи на наиболее правильной теоретической основе. Тем не менее, пастор Грот остался при своем мнении. Более того, он счел невозможным оставить без ответа «публично предложенное возражение» и высказал целый ряд контраргументов. Не ставя под сомнение правильность расчета Эйлера (см. табл. 1), пастор Грот не соглашался с допущениями, на которых он основан. Он отмечал, что в примере Эйлера Общество формируется из лиц одного возраста, а места умерших занимают лица одинакового с ними возраста, поэтому количество скончавшихся каждый год возрастает. На самом же деле в Общество принимались люди разного возраста (от 20 до 50 лет), и не требовалось, чтобы вступающий на место умершего был одних с ним лет. Кроме того, по достижении Обществом полной численности в 550 человек, в него должны были приниматься люди не старше 40 лет. Поэтому проблем с пополнением не будет, и увеличения смертности среди членов Общества не произойдет. Отсюда пастор делал вывод, что количество скончавшихся в течение года будет меньше, чем в приведенном Эйлером примере. Значит, годовые сборы с оставшихся в живых членов Общества также окажутся меньше, и у каждого сумма внесенных в кассу денег будет расти медленнее.

Еще один аргумент пастора Грота заключался в том, что поскольку законы смертности базируются на статистике, которая не учитывает состояние здоровья, они неприменимы к создаваемому Обществу, куда принимаются только здоровые люди. Поэтому можно полагать, что жизнь участников, независимо от возраста, продлится дольше, и смертность среди членов Общества будет меньше, «нежели... предполагали тому законы смертности при различности состояния здоровья». Следовательно, годовые сборы на смертные случаи будут меньше составлять, и «ожидаемая выгода в таком отношении будет превосходнейшая, доколе малое число сочленов принадлежать будет в число глубоко престаревших людей». Последняя оговорка показывает понимание Гротом возможности, что у кого-то из тех, кто вступит в Общество в среднем возрасте и доживет до глубокой старости, сумма сборов на смертные случаи превысит размер установленной выплаты наследникам. Но он рассчитывал на немногочисленность подобных случаев. Тем не менее, пастор справедливо опасался, как бы перспектива возможных потерь не стала препятствием для вступления в Общество. Он старался найти убедительные оправдания этим потерям. Грот считал, что если сумму убытка от переплат разделить на число лет пребывания в Обществе, получится очень небольшая величина, которая не может считаться существенной, и, кроме того, оправдывается долгой жизнью. Пастор сравнил риск возникновения переплат с лотереей, проигрыш в которой не воспринимается как несправедливость.

В отличие от доводов Эйлера, базирующихся на строгом математическом обосновании, аргументы пастора Грота, хоть и выглядят довольно убедительными, во многом умозрительны и рассчитаны на высокую сознательность людей — членов Общества. Позволим себе высказать предположение, что не только изложенные аргументы удерживали пастора Грота от использования схемы, предложенной Эйлером. Скорее всего, его смущали суммы, которые членам Общества следовало вносить в кассу, чтобы их наследники получили желаемую 1000 руб. Нами выполнен расчет по формуле (3) при K=1000 руб. и λ=1,05, результаты которого приведены в таблице 3. Нетрудно заметить, что даже ежегодные взносы очень велики (для сравнения, придворный художник в то время получал 500 руб. в год). Это могло отпугнуть очень многих от вступления в Общество, ведь оно представляло интерес преимущественно для людей невысокого и среднего достатка. Богатые в нем, как правило, не нуждались, а беднякам и двухрублевый взнос был непосилен. Уменьшение же выплачиваемой суммы до 100 рублей снизило бы привлекательность Общества. Вот и продолжало оно работать по прежней схеме.

Впоследствии опыт его практической деятельности подтвердил правоту академика. Проблема переплат со временем возникла, и рассуждения об относительности убытка стали слабым утешением для тех, кто с ней столкнулся. Однако за все время своего существования, ни при жизни пастора Грота[6], ни позже, вплоть до своего закрытия в январе 1828 г., Общество на смертные случаи так и не воспользовалось рекомендациями Л. Эйлера.

Таблица 3.

	Оплата при вступлении $z = 0$	Ежегодная оплата равными суммами $x = z$
Возраст	x	z
20	927,07 руб.	59,48 руб.
40	936,45 руб.	68,31 руб.
60	955,86 руб.	97,37 руб.

Подведем итоги:

Нами показано, что причиной, побудившей академика Л. Эйлера написать и опубликовать в 1776 г. работы, вошедшие в сборник [5], явился неизвестный ранее эпизод его биографии — рассмотрение в 1775 г. проекта устава Общества на смертные случаи при лютеранской церкви св. Екатерины в Санкт-Петербурге по просьбе его друга — пастора этой церкви Иоахима Грота. Документально подтверждено, что автором этих работ является Л. Эйлер. Продемонстрировано, что в России во второй половине XVIII в. существовали простейшие общества страхования жизни типа похоронных или смертных касс и т. п. Это дает основание вести историю личного страхования в России не с 1835 г. или более позднего времени, а со второй половины XVIII в., не позднее 1770-х годов.

Примечания:

[1] Среди них: Российская Национальная библиотека, Библиотека Российской Академии наук, Библиотека Конгресса США, Французская национальная библиотека и др. (по данным на 29 февраля 2008 г.).

[2] В 1776 г. Н. Фусс был помощником Л. Эйлера. Вспомним, что к концу 1760-х годов великий математик, обладая ясным мышлением, был почти слепым и не мог успешно работать без помощников. Зная об этом, Даниил Бернулли в 1772 году рекомендовал ему одного из своих лучших учеников, восемнадцатилетнего Николая Фусса, уроженца Базеля — родного города Леонарда Эйлера. Н. Фусс был приглашен в Петербург и по приезде «принят в дом и семейство» академика. Он стал ему верным помощником, достойным учеником, а впоследствии и родственником, женившись на внучке своего учителя. В 1774 году Н. Фусс написал свою первую диссертацию, подготовленную под руководством Л. Эйлера, а 15 января 1776 г. получил звание адъюнкта математики Санкт-Петербургской Академии наук. С годами он и сам стал академиком и секретарем Академии наук.

[3] Подробно об этом Обществе см. [14].

[4] Здесь и далее (a), (a+1), (a+2) и т. д. представляют собой коэффициенты из таблицы смертности. Они являются функцией от возраста. Более привычное для современных читателей обозначение коэффициента (a) могло бы выглядеть так: $k_a=f(a)$, где a — возраст человека на момент вступления в Общество. Через год возраст будет равен a+1, соответственно $k_{a+1}=f(a+1)$ и т. д.

[5] Таблица Керсебума — таблица смертности населения обоих полов, составленная голландским финансовым чиновником и исследователем Вилемом Керсебумом (Wiliem Kersseboom, 1691–1771).

[6] Пастор Иоахим Христиан Грот скончался 22 декабря 1799 г.

Литература:

1. *Euler L.* Sur les rentes viagères // MAS Berlin. 1767. Vol. 16 (1760). P. 165–175.

2. *Euler L.* Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain // Ibid. P. 144–164.

3. *Осипов В. И.* Петербургская Академия наук и русско-немецкие связи в последней трети XVIII века. СПб., 1995.

4. *Euler L.* Nöthige Berechnung zur Einrichtung einer Wittwen-kasse // Neues Hamburg. Mag. 1770. № 43. S. 3–12.

5. Éclaircissemens sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts, avec la description d’une nouvelle espèce de Tontine aussi favorable au Public, qu’utile à l’Etat; calculés sous la direction de Monsieur Léonard Euler. par Mr. Nicolas Fuss. Adjoint de l’Academie Imperiale des Sciences. A St. Petersbourg. SPb, 1776.

6. LEOO I, 7. P. 181–245.

7. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР / Сост. Ю. Х. Копелевич, М. В. Крутикова, Г. К. Михайлов, Н. М. Раскин. Т. 1. М.; Л., 1962.

8. *Паевский В. В.* Демографические работы Эйлера // Леонард Эйлер. 1707–1783. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. М.; Л., 1935. С. 103–110.

9. *Лысенко В. И.* Николай Иванович Фусс. 1755–1826. М., 1975.

10. СПбФ АРАН. Ф. 3. Оп. 1. Д. 547 (1776 г.). № 255. Л. 157.

11. Там же. № 394. Л. 214 об.

12. Там же. № 406. Л. 220.

13. Entwurf einer allgemeinen Leihe-Bank wo nicht nur Kapitalien zu gewissen Zinsen sowol ausgelehnt als angenommen, sondern auch zugleich andere verschiedene Anstalten als Leibrenten, Sterbe- und Wittwen-Kassen damit verbunden werden können, berechnet durch N. Fuss. Adjunkt der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. SPb.: Kaiserl. Akademie der Wissenschaften, 1776.

14. *Николаева В. В., Захаров А. С.* К истории личного страхования в России. СПб., 2006.

15. Собрание учреждений и предписаний касательно воспитания в России обоего пола благородного и... юношества, с прочими в пользу общества установлениями / Сост. и изд. И. И. Бецкой. Т. 1–3. СПб., 1789–1791.

16. *Büsching A. F.* Wöchentliche Nachrichten von Neuen Landcharten, geographischen, statistischen und historischen Büchern und Schriften. Des vierten Jahrgangs Fünfs und dreißigstes Stück. Berlin, 1776. S. 286.

17. *Fuss N.* Éloge de Monsieur Léonard Euler, lû à l’Académie Imp. des sciences, dans son assemblée du 23 Octobre 1783. Avec une liste complette des ouvrages de M. Euler. SPb., 1783.

18. *Гнеденко Б. В.* О работах Леонарда Эйлера по теории вероятностей, теории обработки наблюдений, демографии и страхованию // Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. М., 1958. С. 184–208.

Maria Teresa Borgato
Ferrara, Italy

Euler, Lagrange and Life Insurance

Аннотация: Фридрих Великий, который вызвал Эйлера из Петербурга в Берлин с целью организации Академии наук, часто советовался с ним по техническим вопросам, касающимся пенсионных фондов или пожизненной ренты, однако статьи Эйлера на эту тему были полностью опубликованы вскоре по возвращении его в Россию. В частности, Эйлер написал работу о вдовьих кассах, которая намечала пути решения проблемы, очень остро ощущавшейся на севере Европы во второй половине XVIII столетия. Похожей проблемой занимался и Лагранж, когда Прусское государство решило вновь организовать институт страхования для вдов. В настоящей работе представлена неотредактированная статья Лагранжа на эту тему: она написана в немецкой традиции исследований делопроизводства, в которой, начиная с 1760 г., были написаны многочисленные работы Эйлера, переизданный в 1761 г. «Божественный порядок» Зюсмильха, а также работы Ламберта, Зейберта и Криттера.

Widows' funds

Funds for the assistance of widows were created all over Northern Europe from the last decade of the seventeenth century, often on the initiative of some clergymen. Following the first attempts in the early 1700s, there was a new wave of such initiatives in the German territories in the second half of the eighteenth century, promoted by the local authorities: it is worthy of note that the insurer parties were state institutions and not private insurance companies like in Great Britain. The almost certain bankruptcy of these funds, which were quite primitive compared to modern principles of life insurance, served as a stimulus to plan new offers of insurance premiums in the latter part of the eighteenth century.

One fund was founded in Bremen in 1754 and failed rather quickly, one in Gotha, four in Braunschweig and Hamburg, two in Berlin: the first, failed in 1749, and a second one in 1775, two funds in Denmark: the first, founded in 1739 for military widows, followed by a more extensive one in 1774. Particularly in German lands, the collapse of various well-publicized national funds, led to a more careful reading of statistical and probability laws, so that the contributions were established in accordance with detailed tables, related to the age of both the wife and her husband, and derived by means of actuarial calculations on the basis of mortality tables.

Moreover these funds, unlike other more traditional forms of insurance and social assistance, were addressed to a much wider public and were based on a continuous recruitment as well as a continuous increase in capital in order to sustain their financial operations.

One of these funds, perhaps the most representative and famous, was that created as a state institution by the territorial government (*Landschaft*) in the principality of Calenberg (of the House of Hanover): the *Calenbergische Witwen-Verpflegungs-Gesellschaft*. The fund was administered by the Treasury Committee and submitted to the Calenberg Council of Deputies at the court of George III in Hanover. At the same time, the fund was also considered a public undertaking which was accountable for its income and expenditure.

On the widows' fund in Calenberg, known simply as "the Calenberg", there exists abundant literature[1]. It relied on continuous growth, and by adopting a particularly bold system of recruitment, it became the most popular fund in Germany and perhaps in Europe, too, as many of its clients came form outside the German borders.

The Calenberg Institution was preceded by a competition promoted by the Scientific Society of Göttingen for the years 1763 and 1764, devoted to a theme of economics: the best way to organize a fund for widows. In April 1767 the Calenberg was set up with Anton Dies as its head accountant ("Registrator").

In the Calenberg the subscribers acquired a certain number of units of credit, called *Simpla*, in relation to the entity of the pension and the age of the husband and wife. The cost of the *simplum* was recalculated every six months on the basis of the expenditure, made up mainly of pensions to be paid, and the expected income. Once the value of the *simplum* had been approved by the competent authorities, it was publicized and circulated together with a six-monthly progress report on the fund.

A heated dispute arose between Dies and the City Treasurer of Göttingen, Johann Austin Kritter (1721–1798), who, in 1766 sustained that the new plan dangerously underestimated the commitment constituted by the future pensions. Dies drew up lengthy documents to refute the statements made by Kritter, who then published, in 1768, a book on insurance institutes [1]. The dispute continued with an exchange of articles and pamphlets through the years 1768 and 1769, to which several alarmed subscribers added their own views by writing articles published in their local newspapers. 1773 was the first year in which the discrepancy in the balance between income and expenditure made it necessary to opt for a greatly unpopular increase in the *simplum*, or for a subsidy from the *Landschaft*, and a new administrator was brought in alongside Dies. The difficulties in which the Calenberg found itself were common knowledge in 1780, when, with the increase in the number of subscribers, but also an increase in the number of pensions to be paid, the Institute entered a spiral of debts which forced it to make continuous revisions, bringing about increases in contributions and reductions in the pensions, all of which generated disputes and a general outcry.

Many of the most important German mathematicians were involved, either formally or informally, as were several faculties of law. Arguments for and against circulated in the form of pamphlets and hand-bills, and there were numerous academic debates on the mortality tables and the methods of calculation for the premiums.

Euler's memoir on widows' fund

Euler dedicated five memoirs to the subject of life insurance policies (immediate or deferred life annuities, insurance and annuities in the case of death, for one or more parties). He also devised a project for a perpetual tontine. In the first two published works still on the *Mémoires de l'Académie des Sciences of Berlin* of 1767 ([2],[3]), shortly after his return to Russia, having been summoned by Catherine II, Euler lay the basis of the calculus for annuities. This research work was probably stimulated by Frederic II who had asked Euler's opinion on pension funds and life annuities in order to establish a new widows' fund [4][2].

In the former, Euler introduced the symbols (1), (2), (3), ... (n), ... to indicate the probabilities at birth of surviving to age 1, 2, ... n (i.e. the ratio between the survivors up to the age n and the number N of the individuals who constitute the original population)[3], and he solved problems such as: calculating the probability that an individual of m years should live for another n years, or may die during an established year; he determined the probable (or median) life expectancy at a given age (*force de la vie*: "le terme auquel un homme d'un age donné peut espérer de parvenir, de sorte qu'il est également probable qu'il meure avant ce terme qu'après"). He not only found a refined solution to the basic problem of life annuities, but also that of determining the annual payment that corresponded to an established initial capital, as well as that of the life annuities made on a newborn, payment of which were to be started after a certain number of years. In modern terms Euler determined: the amount of the immediate life annuity corresponding to an established capital (*net single premium*), and the amount of a deferred life annuity of n years, in the newborn's favour, equal to the sunk capital paid-up at birth. In the second part of the memoir Euler enunciated the famous hypothesis of demographic growth: "a population increases, at equal time intervals, in geometric progression, when there is nothing to hinder its growth".

In the memoir *Sur les rentes viagères*, which follows in the same volume, Euler solved the opposite problem of determining the premium of an immediate life annuity at an annual benefit payment of r, by providing a general formula and some premium tables in relation to age, based on Kersseboom's mortality tables.

Euler's next work was inspired by the project for a widow's pension fund, contained in the book on life insurance policies that Johann Augustin Kritter, a Senator and *Kämmerer* in Göttingen, had sent to him in 1768 [1]. The book gave Euler the opportunity to write a memoir which was presented to the Académie Impériale des Sciences in St. Petersburg on 3rd April 1769, but which was published through Kästner, who was a Professor at Göttingen, in Hamburg, in 1770 [5].

The problem was as follows: a couple composed of husband x and wife y, makes an initial sunk payment k to the Institution and then agrees to pay out a premium a every year, throughout their contemporaneous lives. The Fund, in its turn, agrees to pay the widow an annual pension p from the moment of the husband's death. If the wife were to die before the husband, the sum paid out would be acquired by the Fund, which would no longer have any obligation toward the widowed husband. The same problem, amplified owing to exemplifications and the insertion of five numeric tables, was also solved in the first part (*D'un établissement public pour payer des pensions à des veuves, fondé sur les principes les plus solides de la probabilité*) of Euler's most important work on actuarial mathematics [6][4].

Euler expressed the general problem as follows: “the problem is to provide a person B aged b with a life annuity of 100 rubbles per year, which cannot, however, begin until after the death of another person A, aged a. The question is at what premium at the present time is the expectation of the aforementioned person B to be estimated, in order to benefit from the aforesaid annuity”.

Let us now take a more careful look at Euler’s deterministic solution to the widows’ fund, so that it may be compared to the analogous mathematical treatment developed by Lagrange.

It may be seen that the conditions laid out in the contract were different, in that, in the case of the beneficiary’s premature death, in Euler’s project the amount paid out was not given back.

a = age of the husband
b = age of the wife
x = initial capital
z = annual premium
p = pension or life annuity after the death of the husband

The sum of all the quantities x and z, brought up to their current value, has to be equalised with the sum of the pensions p which the widows would have until they died, these, too, are considered at their current value.

In order to calculate the number of years that the husband will live and the number of years that the wife will live, the rules of probability are to be applied.

Let N be the number of births (all supposed to have occurred at the same time)

$(1)\,N$ the number of survivors after one year
$(2)\,N$ the number of survivors after 2 years
………
$(a)\,N$ the number of survivors of age a
………
$(a+n)\,N$ the number of men of age a still alive after other n years

Euler deduced the values of (1), (2), … , (95) from the tables of mortality in France and Holland.

Let M be the number of the husbands of age a; after 1 year they are in number: $M\dfrac{(a+1)}{(a)}$, after 2 years: $M\dfrac{(a+2)}{(a)}$ e generally after n years: $\dfrac{(a+n)}{(a)}M$.

Analogously the number of the respective wives, still alive after n years is given by: $\dfrac{(b+n)}{(b)}M$.

Following Euler, let us now consider how much money the insurance fund would receive and how much it would have to reimburse, bringing everything up to its present value. Let us suppose that the pension begins the following year.

Initial sum: $M\,x$. The first year the sum remains the same.

The second year the number of deceased husbands is: $\dfrac{(a)-(a+1)}{(a)}M$, and that of the wives who died analogously: $\dfrac{(b)-(b+1)}{(b)}M$. The difference between income and expenditure may be calculated by examining different cases:

1°) Husbands whose wives are still alive. They number: $\frac{(a+1)}{(a)}\frac{(b+1)}{(b)}M$ and pay into the fund a further sum: $\frac{(a+1)}{(a)}\frac{(b+1)}{(b)}M\,z$ whose present value is : $\frac{(a+1)}{(a)}\frac{(b+1)}{(b)}M\frac{z}{k}$ where $k=1+\frac{c}{100}$, c being the percentage interest.

2°) Husbands who have lost their wives. They number: $\frac{(a+1)}{(a)}\frac{(b)-(b+1)}{(b)}M$. In such cases there are no variations in the fund.

3°) Women who have lost their husbands, number: $\frac{(b+1)}{(b)}\frac{(a)-(a+1)}{(a)}M$. In such cases the fund must pay out the overall sum: $\frac{(b+1)}{(b)}\frac{(a)-(a+1)}{(a)}M\frac{p}{k}$.

4°) Husbands and wives both deceased in the span of one year. No variation in the fund.

For the third year in the same way one must take into consideration further incomes equal to : $\frac{(a+2)}{(a)}\frac{(b+2)}{(b)}M\frac{z}{k^2}$ and further expenditure equal to: $\frac{(b+2)}{(b)}\frac{(a)-(a+2)}{(a)}M\frac{p}{k^2}$.

The procedure is to be similar for the following years, until annulment of the quantities $(a + n)$ and $(b + n)$.

Then let:

$$Z=\sum_n \frac{(a+n)}{(a)}\frac{(b+n)}{(b)}\frac{z}{k^n};\, P=\sum_n \frac{(b+n)}{(b)}\left(1-\frac{(a+n)}{(a)}\right)\frac{p}{k^n}$$

Euler arrives at the equation: $x+Z=P$ in which one of the unknown quantities x and z may be determined at will. In the calculation of Z and P he considers the following partial sums, which may be derived from the mortality tables:

$$B=\sum_n \frac{(b+n)}{(b)k^n};\quad C=\sum_n \frac{(a+n)(b+n)}{(a)(b)k^n}$$

Having determined the values of B and C, resulting in: $Z=Cz$; $P=(B-C)p$, Euler arrives at the fundamental equation:

$$x+Cz=(B-C)p,$$

on the basis of which may be calculated the premiums x and z which every husband has to pay only in relation to his age and that of his wife, in accordance with the most rigorous rules of equity.

Euler then provides various tables for the values x and z in relation to age.

First of all he writes: $a = b + d$, where d indicates the difference between the ages of the wife and husband, and negative values may also be assumed, with 95 as the maximum age (beyond this age the mortality tables gave negligible values); in order to facilitate calculation of the quantities B and C, he writes:

$$B=\frac{S}{(b)k^{n+1}};\, C=\frac{T}{(b)(b+d)k^{n+1}}$$

where $n = 94-b$ and S and T are the sums:

$$S = (95) + (94)k + (93)k^2 + \cdots + (b+1)k^n$$

$$T = (95)(95+d) + (94)(94+d)k + (93)(93+d)k^2 + \cdots + (b+1)(b+1+d)k^n$$

He then simplifies the calculations by choosing to consider the data constant for groups of five years, and then substituting the terms in the above series with their mean calculated on five years ($b = 5\,\beta$):

$$B = \frac{S}{(5\beta)k^{n+1}}; \quad C = \frac{T}{(5\beta)(5\beta+d)k^{n+1}}$$

Euler constructs the numeric table of values B for all the wives' ages from five to five years between 15 and 90 years, from which he derives the tables of values C and $B - C$, varying a every five years, in the main cases $a = b$, $b+5$, $b+10$, ... , $b+30$, and further: $a = b - 5$, $b - 10$. After determining the values B, C and their differences in relation to the ages of the husband and wife, he solves the fundamental equation for various values of x and z. First of all the borderline cases: supposing $z = 0$ we have

$$x=(B-C)p$$

where x is the capital to be laid out in a single payment (*net single premium*) in order to guarantee the annual pension p.

In the other case we have $x = z$, when the pension p is guaranteed by constant annual premiums. In this case we have:

$$z = \frac{(B-C)p}{1+C}$$

For these two cases Euler provides tables of x and z, both related to age of the wife and the age difference between the couple. The pension was established at 100 rubbles, but given the proportionality in p the tables could be used for any sum of pension. Moreover, they could be used to calculate the premiums for an infinite number of intermediate cases, that may arise. For instance, with an initial payment of half the capital x, this would guarantee half the pension (50 rubbles) and the other half would be guaranteed by an annual premium equal to $z/2$, x and z being the values derived from the previous tables. So in summary, by paying out an initial capital of $\frac{x}{n}$, an annual premium equal to $\left(1-\frac{1}{n}\right)z$ was to be established. Euler provides some particular examples.

Finally, using the fixed tables, Euler also derives the capital, equivalent to the life annuity, which the widow could decide to collect in a lump sum on her husband's death (*single benefit payment*), and generally solves the problem of the insurance of a capital, by means of a single or periodic premiums.

As all the calculations are made to balance income and expenditure, Euler suggests the insurance institution should increase the premium or reduce the pension by some percentage points, in order to cover management expenses and risk (according to the modern concepts of: "equity and adequacy").

Later Euler adds tables which were easier to use, in which the premiums depend only on the ages of the wife and her husband, and not on their age difference[5].

In conclusion, in this memoir, Euler solves the general problem of life annuitie through single or periodic payments (both premiums and benefits). The Euler method may be extended to all types of life insurance policies.

Lagrange and Prussian widows' fund

Lagrange was involved in the problem of a widows' fund when the Prussian government, under Frederick II, in its turn established a widows' fund at the end of 1775: the *Königlich Preußische allgemeine Wittwen-Verpflegungs-Anstalt*, whose declared aims were: to insure the family in case of father's death, reduce the problems related to orphans' charge and promote the population growth.

After leaving Turin, where he was born, Lagrange arrived in Berlin on 27th October 1766, having passed through Paris and London [7]. He had been invited by Frederick II on the recommendation of d'Alembert, to take up the post as Director of the class of mathematics of the Académie des Sciences et Belles-Lettres, which had been left by Euler. At the court of Frederick II he maintained a position of reserve and tried not to involve himself in the polemics with the court and the Prussian bureaucracy. There was one occasion on which he could not, however, avoid conflict that he faced with great determination and tenacity which appeared almost as obstinacy.

On 28th December, 1775, the rules and regulations of a new insurance institute for widows, supported by some ministers and, in particular by von der Schulenburg[6], were published and circulated among the academicians [8].

Lagrange examined them and basing his study on the calculus of probabilities he expressed his criticisms to some of the academy members. As he was urged to carry out further research into the matter he wrote a paper on life annuities which was read in the Academy on 22nd February of the following year. In this memoir he demonstrated that the bank, which had to pay the pensions and collect the instalments, would have ended up bankrupt, thus contradicting Schulenburg. Lagrange had to defend his position against the minister who replied that instead of publishing the report he should have sent it to the government. Lagrange retorted, firstly, that he had not, in fact, published it but had merely wished to warn his colleagues of the risk that they would have encountered had they become involved in the project, and, secondly, that as he had not been employed to follow the orders of ministers he was under no obligation to be kept waiting by them to offer services that were not required of him, but rather that it was their responsibility to consult whoever they deemed competent. Finally, he felt that their rebuke was unmerited since they had not turned to him for advice [9].

Eighteenth century dictates expected the exercise of discretion in the widow' funds, for which negative publicity was likely produce panic and a consequent bankruptcy. The paper circulated, therefore, in the form of a manuscript, and among a limited circle of scholars. Lagrange's criticisms were, probably, taken up by Kritter, who in the same year, 1776, sent von der Schulenburg a study on the project of widows assistance, in which he foresaw failure within 7 or at most 10 years. Then he published a paper in Hamburg with the mathematical calculations of this prediction [10].

There is no direct proof of a connection between Lagrange's memoir and Kritter's, although Lagrange definitely sent it to Louis de Beauzobre on the 14th of April 1776, because he had asked for it for a friend of his. Beauzobre reassured Lagrange of his discretion in the matter[7]:

"M. de la Grange pourroit-il me communiquer son Memoire sur l'Etablissement pour le fond des veuves. Un de mes amis voudroit le lire: je lui reponds qu'il ne s'agit pas de le copier, ni d'en faire un extrait, ou d'en communiquer quelques idées au public: je sais trop ce que les gens de lettres se doivent pour risquer de demander quelque chose qui puisse par la suite causer quelques regrets à M. de la Grange".

Kritter continued writing on insurance institutions [11]; he also wrote a long introduction to Euler's memoir translated into German [12].

The Prussian institute for assistance to widows continued to work at least until 1793, when the polemic reappeared in a long article in the *Berlinische Monatsschrift* [13]. Kritter had also remarked that the failure might have happened some years later than predicted, thanks to the new subscriptions, which required an initial payment to be paid back later. On the contrary, the article pointed out that the Institute had survived paying the pensions regularly, without any reduction or help from the government, and that it was able to carry on until 1803.

Lagrange returned to the question of annuities, this time for orphans up to majority age, in a lecture held at the Academy of Berlin on the 8th of March 1781 but which was published eleven years later [14].

Lagrange's unedited memoir

Going back to the analysis of the manuscript [15], at the beginning the problem is explained:

The Prussian Institute for assistance to widows was a public bank in which a husband could insure his wife, in case of his death, with a life annuity of 25 thalers, or any multiple of this up to a maximum sum of 1000 thalers. In exchange he accepted the following conditions:

1. an immediate payment proportional to the annuity and related to his age and that of his wife; this sum would be given back to him or to his heirs should the marriage come to an end, for reason of death or divorce;

2. a yearly payment, as long as the marriage lasts, of a fixed sum, again proportional to the annuity and related to his age and that of his wife.

By leaving aside some conditions referring to particular cases, which could not be treated mathematically, the problem was brought to the following:

A certain person A aged α wants to settle a life annuity equal to r, on another person B aged β, to be enjoyed only after the death of A should B survive the former. To this end A offers in exchange:

1. to make an immediate payment of a given sum p, on condition that it be given back to him or his heirs on the death of A or B;

2. to pay an annual sum q during the contemporaneous lives of A and B.

The question is whether this contract may be of advantage or disadvantage to A .

It was also hypothesized that the sums p and q were to be paid at the beginning of each year, at a compound interest of 1 over n ("au denier n").

The aim was not to provide a general solution to be used in concrete situations, but to demonstrate, on the basis of the tables of contributions established in the regulations, the future failure of the Prussian fund.

Lagrange solves the problem in general and, on the basis of the mortality tables of Simpson and Deparcieux, he, therefore, demonstrates that the insured party was always at an advantage, and the younger the insured party, the greater his advantage.

Lagrange provides the solution following three different procedures.

The first solution is the most standard, even if less rapid, and applies the rules of the calculus of probability, by analysing the various cases which could occur from year to year, then multiplying the probability of each by the sum which *A* must gain or lose in that case (*espérance*), considering the losses as negative gains, reducing the sums payable at different times to their present value; finally adding all these products (*espérance totale*).

If positive, the total expectation would express an advantage for *A*, if negative, a disadvantage.

The probability of these cases cannot be estimated *a priori*, but deduced from the mortality tables. Lagrange cites the main mortality tables of the time available to statisticians in printed works: those of Halley [16], Hodgson [17], Kersseboom [18], Deparcieux [19, 20], Simpson [21], Buffon [22], Wargentin [23], Süssmilch [24] and Lambert [25]. In the end, he uses those of Simpson and Deparcieux, since they presented the greatest differences.

Lagrange's study was so detailed and clear, revealing a didactic intent, that it could be used as a guideline for practical problems.

To present the solution in a general form, he defines:

$$(0), (1), (2), (3), (4), \dots$$

the numbers, deduced from the mortality tables, of the individuals who survived to the ages of: 1, 2, 3, 4, ... in such a way that out of (0) newborns, there are (1), (2), (3), ... that reach their first, second, third etc. year of life.

In this way the probability that a person aged *m* years lives for a further *n* years, is expressed by $\frac{(m+n)}{(m)}$; the probability that the same person dies between the ages μ and ν is expressed by $\frac{(\mu)-(\nu)}{(\mu)}$; and so on[8].

Lagrange considers compound interest («je remarque que l'hypothèse de l'intérêt composé est la seule qui soit conforme à la nature, et qui donne des résultats convenables») so the present value *x* of a sum *s* payable after α years is expressed by $x = \frac{s}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}}$.

Adding together the expected values and subtracting the sum *p*+*q* that *A* must pay immediately, Lagrange finds the total expectation given by the formula

$$p\left(-1+\frac{(\alpha)(\beta)-(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha)(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)-(\alpha+2)(\beta+2)}{(\alpha)(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}}+\frac{(\alpha+2)(\beta+2)-(\alpha+3)(\beta+3)}{(\alpha)(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3}}+\dots\right)$$

$$-q\left(-1+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha)(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{(\alpha)(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{(\alpha+3)(\beta+3)}{(\alpha)(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}+\dots\right)$$

$$+r\left(\frac{(\alpha)-(\alpha+1)}{(\alpha)}\times\frac{(\beta+1)}{(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{(\alpha)-(\alpha+2)}{(\alpha)}\times\frac{(\beta+2)}{(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{(\alpha)-(\alpha+3)}{(\alpha)}\times\frac{(\beta+3)}{(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}+\dots\right)$$

Then Lagrange obtains the same solution more rapidly by considering successively the gain and the loss of *A* for each year according to the different cases which may occur.

In the third solution Lagrange reaches the result even more simply by transforming the problem into the following one, solvable with the ordinary rules for the calculus of life annuities:

An individual *A* aged α wants to provide a life annuity of an annual sum *r* in favour of *B* aged β in exchange for an annual payment of $\frac{p}{n+1}+q+r$ during the contemporaneous lives of *A* and *B*.

Each sum is to be paid at the beginning of the year; the interest is of $1/n$.

He obtains the new formula for the total expectation:

$$r(b-c)-\left(\frac{p}{n+1}+q\right)(c+1)$$

where *b* expresses the present value of a life annuity equal to 1 in favour of an individual aged β and *c* the present value of a similar life annuity in favour of two persons aged α and β respectively, which ceases on the death of one of the two individuals:

$$b=\frac{(\beta+1)}{(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{(\beta+1)}{(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{(\beta+1)}{(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}+\dots$$

$$c=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha)(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha)(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha)(\beta)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}+\dots$$

The rules of the institute contain tables reporting the values of the initial sum *p* and the annual contribution *q* for a pension of 25 thalers, corresponding to each age of the husband *A*, from 20 to 60 years, and of the wife *B*, from 13 to 90 years.

Lagrange obtains the values of *b*, *c* and *b–c* for different *p* and *q* contributions from these tables and then calculates the total expectation; for example, if wife and husband are both twenty years old for a pension of 25 thalers the tables indicate that $p = 10$ and $q = 1 + 1/12$. From Simpson's mortality table he finds that $b — c = 2.9$, and c = 11.1; from Deparcieux $b–c = 2.42$ and $c = 14.6$. From his formula he deduces the advantage, according to Simpson of 55.2 thalers, and according to Deparcieux of 38.4 thalers.

In any case, according to both Simpson's and Depacieux's tables, by calculating the advantage for each age between 20 and 60, he concludes that the advantage will always be on the side of the insured party, and that this advantage will always be greater the younger the insured party.

On the contrary, the advantage should have been zero, so that neither the insured party nor the institute had anything to gain or lose.

Lagrange maintained an interest in mathematics applied to social matters during his stay in Paris. He wrote a brief essay on political arithmetic which was published in the fourth year of the French Republic. It was part of a collection of memoirs on political arithmetic printed by Roederer in 1796, at a moment when there was great debate on the question of direct or indirect taxation [26]. Bearing in mind the statistic investigation by Lavoisier, in Lagrange's essay the average annual food consumption for each inhabitant of France was calculated and analysed and some suggestions for the home production were made in favour of food with a higher nutritional value.

Later, as a member of the Institut of France, Lagrange favoured research on political arithmetic and statistics, as well as the application of mathematics to social phenomena and techniques, as witnessed by his relations to Duvillard's projects for the National Savings Bank, to Prony's for the register of landed property, to the project of Bréguet and Betancourt for the telegraph.

Lagrange's interest for human sciences was reflected in his impressive library which included essays on political economy among which Malthus' on populations, statistical works on the distribution of populations, studies on mortality as a consequence of epidemics and on the incidence of vaccines, studies on saving banks, and tables of linear arithmetic for commerce and finance [27, 28].

Notes:

[1] On the risk theory applied to the bankruptcy probability see [29]. On widows' funds generally: [30]. On German widows funds: [31], [32], [33].

[2] Euler was also involved in demographical studies and contributed to chapter VIII of Johann Peter Süssmilch's work [24].

[3] In the second memoir these symbols indicate, instead, as in Lagrange, the sequence of the survivors up to 1, 2, 3, ... years.

[4] In the second part *Sur l'établissement d'une Casse pour les morts*, Euler took as a starting point the foundation of a confraternity composed of 550 people, in which each member agreed to pay 2 rubbles every time one of the members died to sustain the deceased's family, and to cover the funeral expenses. Each deceased member was to be replaced by a new member. Euler demonstrated that such a fund could not survive very long. The third part (*Plan d'une nouvelle espèce de tontine*) saw the development of the original idea of a perpetual tontine which could always be accessed and whose members could always know in advance how much the annuities would increase each year.

[5] The new tables included in the French version of Euler's essay on widows' funds were elaborated with the help of Nicolas Fuss, adjoined member of the Russian Academy of Sciences.

[6] Alexander Friedrich George Graf von der Schulenburg-Blumenberg (1745–1790), director of the Witwenverpflegungsanstalt.

[7] Bibliothèque de l'Institut de France, ms 916, c. 76 r.

[8] In modern symbols : ${}_{n}p_{m}$and ${}_{\nu-\mu}q_{\mu}$.

References:

1. *Kritter J. A.* Oeconomisch-Politische Auflösung der wichtigsten Fragen, welche jetzo wegen der Einrichtung dauerhafter Witwen-Cassen aufgeworfen werden: nach den Süßmilchischen Grundsätzen angestellet in einem Briefwechsel zweyer Patrioten; nebst einer Beurtheilung des neuen Bremischen Instituti einer Trauerpfennig-Beysteuer. Göttingen: Vandenhoeck, 1768.

2. *Euler L.* Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain // HASBL Berlin. 1767. T. 16. P. 144–164.

3. *Euler L.* Sur les rentes viagères // Ibid. P. 165–175.

4. *Valentin G.* Leonhard Euler in Berlin // Festschrift zur Feier des 200. Geburstages Leonhard Eulers, herausgegeben vom Vorstande der Berliner matem. Gesellshaft, Mit swei Bildnissen Eulers. Leipzig, Berlin, 1907. P. 15.

5. *Euler L.* Der Herrn Leonhard Eulers nöthige Berechnung zur Einrichtung einer Witwencasse // Neues Hamburgisches Magazin. 1770. P. 3–13.

6. *Euler L.* Éclaircissemens sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts, avec la déscription d'une nouvelle espèce de Tontine aussi favorable au Public qu'utile à l'État. St. Petersbourg, 1776.

7. *Borgato M. T., Pepe L.* Lagrange: appunti per una biografia scientifica. Torino: La Rosa, 1998.

8. Patent und Reglement für die Königlich Preußische allgemeine Wittwen-Verpflegungs-Anstalt. Berlin: Decker, den 28 Dezember 1775.

9. *Thiébault D.* Mes souvenirs de vingt ans de séjour à Berlin, ou Frédéric le Grand, sa famille, sa cour, son gouvernement, son académie, ses écoles, et ses amis littérateurs et philosophes. 2^{d} ed. T. V. Paris: Buisson, 1805.

10. *Kritter J. A.* Sammlung von dreyen Aufsätzen des Senatoris... Kritters... über die Calenbergische, Preussische und Dänische Witwenversorgungsanstalten: nebst einem Anhang, bestehend in einer Prüfung über die... Verfassung... der in Hamburg zu errichtenden allgemeinen Versorgungs-Anstalt, desgleichen einem Beschluß, bestehend in einem fernern Beweise von der sichern Anwendung der Süßmilchischen Sterbetabellen auf Witwen-Cassen... Hamburg: Reuß, 1777.

11. *Kritter J. A.* Vorstellung des bisherigen Erfolgs bey der in Hannover errichteten allgemeinen Calenbergischen Witwenpflegschaft in den ersten 12 Jahren. Hamburg: Edermann, 1779.

12. *Euler L.* Erläuterungen über die öffentlichen Anstalten zum Besten sowohl der Witwen als Sterbfälle nebst der Beschreibung einer neuen Art von Tontine die für das Publikum eben so bequem als für den Staat nützlich ist. Berechnet unter der Aufsicht des Herrn Leonhard Euler durch Herrn Nicolaus Fuss, Adjunktis der Kaiserl. Akademie der Wissenschafften zu Petersburg. Aus dem Französischen übersetzt und mit einer Einleitung versehen von Johann Augustin Kritter, Senat. und Camerar. in Göttingen. Altenburg: Richterschen Buchhandlung, 1782.

13. *Michelsen J. A. C.* Beweis, daß die Königl. Preußische allgemeine Wittwen-Verpflegungs-Anstalt nicht bis höchstens 1802 Bankerott machen müsse. (mit Tabellen) // Berlinische Monatsschrift. Band 22. 1793. P. 587–616.

14. *Lagrange J.-L.* Sur une question concernant les annuités // Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin. 1792–93. (Œuvres de Lagrange. T. V. P. 613–624.)

15. *Lagrange J.-L.* Solution d'un problème sur les rentes viagères. Bibliothèque de l'Institut de France. Ms. 916.

16. *Halley E.* An estimate of the degrees of mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives // Philosophical Transactions. T. 17. N. 196. 1693. P. 596–610; *Id.*, Some further considerations on the Breslaw bills of mortality // Philosophical Transactions. T. 17. N. 198. 1693. P. 654–656.

17. *Hodgson J.* The Valuation of Annuities upon Lives; deduced from the London Bills of Mortality. London: J. Hinton, 1747.

18. *Kersseboom W.* Eerste verhandeling tot een proeve om te weeten de probable menigte des volks in de provintie van Hollandt en West-Vrieslandt. Gravenhage, 1738. Tweede verhandeling tot een proeve om te weeten etc. Gravenhage, 1742. Derde verhandeling tot een proeve om te weeten etc. Gravenhage, 1742. Proeven van politique rekenkunde. Gravenhage, 1748 (re-edition of the three previous essays).

19. *Deparcieux A.* Essai sur les probabilités de la durée de la vie humain; D'où l'on déduit la manière de déterminer les Rentes viagères, tant simples qu'en Tontines: Précédé d'une courte Explication sur les Rentes à terme, ou Annuités; Et accompagné d'un grand nombre de Tables. Paris: Frères Guérin, 1746.

20. *Deparcieux A.* Addition à l'Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine. Paris: H. L. Guérin et L. F. Delatour, 1760.

21. *Simpson T.* The Doctrine of Annuities and Reversions, ... with... tables, shewing the values of single and joint lives, etc. at different rates of interest... London: J. Nourse, 1742.

22. *Buffon G. L. L.* Histoire naturelle: générale et particulière; avec la description du Cabinet de roi. Paris, 1749–1789. T. 2. P. 590–601.

23. *Wargentin P. W.* Mortaliteten i Sverige, i anledning af Tabell-Verket // Kungl. Vetenskaps-Academiens Handlingar. T. 27. 1766. P. 1–25.

24. *Süßmilch J. P.* Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, Tod, und Fortpflanzung desselben. Berlin: Spener, 1741 (2nd edition: 1761–1762).

25. *Lambert J. H.* Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. 3^{r} Theil: Anmerkungen über die Sterblichkeit, Todtenlisten, Geburten und Ehen. Berlin: Realschule, 1765–1772. P. 476–599.

26. *Lagrange J.-L.* Essai d'arithmétique politique, sur les premiers besoins de l'Intérieur de la République//Collection de divers ouvrages d'arithmétique politique par Lavoisier, Delagrange, et autres. Paris: Corancez et Roederer, An IV. P. 50–56. (Œuvres de Lagrange. T. VII. P. 571–579.)

27. Catalogue des livres composant la bibliothèque de feu M. Le Comte Lagrange. Paris: Merlin, 1815.

28. *Borgato M. T., Pepe L.* Giambattista Guglielmini, la biblioteca di uno scienziato nell'Italia napoleonica. Ferrara: Corbo, 1999.

29. *Pradier P.-C.* L'actuariat au siècle des Lumières. Risque et décision économiques et statistiques // Revue économique. 2003. T. 54. N. 1. P. 139–156.

30. *Riley J. C.* "That Your Widow May Be Rich!": Providing for Widowhood in Old Regime Europe // Economisch-en Sociaal-Historisch Jaarboek. 1982. T. 45. P. 58–76.

31. *Wunder B.* Pfarrwitwenkassen und Beamtenwitwen-Anstalten vom 16.–19. Jahrhundert // Zeitschrift für Historische Forschung. 1985. T. 12. P. 429–498.

32. *Rosenhaft E.* Hands and Minds: Clerical Work in the First "Information Society" // IRSH, 2003. T. 48, Supplement. P. 13–43.

33. *Rosenhaft E.* Did women invent life insurance? Widows and the demand for financial services in eighteenth-century Germany // Family Welfare: Gender, Property and Inheritance since the Seventeenth Century / Ed. D. R. Green, A. Owens. Praeger, 2004. P. 163–194.

З. А. Кузичева
Москва, Россия

Эйлер и Ламберт — трактовка логики

Abstract: The article contains an analysis of the geometrical interpretation of syllogistics using the circular schemes which was suggested by Euler in his “Letters to the German princess”. These schemes are based upon the representation of this notion in terms of volume. As an example of another, algebraic approach the author looks at “Zeichenkunst” by Lambert.

Семнадцатый и восемнадцатый века часто называют эпохой научной революции. К семнадцатому веку в Европе произошла глубокая перестройка социокультурной сферы, повлиявшая на все области научной деятельности. Именно тогда были заложены основы многих разделов современной математики. Одним из факторов этого процесса, несомненно, является создание математики переменных величин, подкрепленное и стимулированное все более глубокой рационализацией мировосприятия и методов познания действительности. Всеобщим становится убеждение в значимости математики для естествознания. Представления об инструментальных возможностях математики, усиленные возникновением принципиально нового отношения к ее символике, порождают твердую уверенность в осуществимости идеи универсальной математики. Развитие символизма выявляет глубокие аналогии между математикой и естественными языками, в результате чего универсальная математика воспринимается как своеобразный искусственный язык, более совершенный, чем любой из существующих естественных языков. Ценным качеством этого искусственного языка является его логичность, гарантирующая четкость, ясность, отсутствие противоречий. Не менее интенсивно развивались философия, языкознание и логика. Изучение естественных языков сопровождалось многочисленными попытками построения искусственных (философских, «всеобщих») языков, что, возможно, было вызвано утратой латынью роли международного научного языка. Все более отчетливыми становятся попытки алгебраизации логики. Проект универсального международного языка, включающего в себя в качестве неотъемлемой составной части усовершенствованную логику, как известно, выдвинул Лейбниц. Первые наметки и попытки реализации этого проекта он изложил в своем «Комбинаторном искусстве» (1666) [1]. Над построением этого универсального языка — универсальной характеристики, в его терминологии, — он продолжал работать в течение всей жизни, разрабатывая, попутно, и фрагменты логических исчислений. Разумеется, он не был единственным ученым, кто пытался использовать математические методы в логике. Достаточно назвать имена Декарта, Блеза Паскаля и др. Хотя подавляющее большинство рукописей Лейбница, относящихся к «характеристике», было опубликовано позднее, в конце XIX – начале XX вв., тем не менее, его идеи были известны современникам из переписки и личных встреч. Так, начиная с 1687 г., Лейбниц переписывался с Яковом Бернулли, который в соавторстве со своим братом Иоганном в 1685 г. опубликовал очерк «Параллелизм логического и алгебраического рассуждений» [2] , где отмечалась аналогия между некоторыми операциями и отношениями алгебры и логики. В XVIII столетии логика все более привлекает к себе внимание как объект математического исследования, предпринимаются все более успешные попытки математизации и, прежде всего, алгебраизации логики. Попытки, аналогичные попыткам Лейбница, предпринимали фон Сегнер, Плуке, Ламберт и другие авторы.

Проблемы логики не были центральными в творчестве Эйлера. Не ставил он перед собой и цели математизации (алгебраизации) логики. Логике посвящены 12 из 234 его писем (97–108) к немецкой принцессе [3]. К тому же, 5 из этих писем носят вводный характер и относятся, скорее, к области психологии. Здесь Эйлер затрагивает проблемы восприятия, возникновения представлений в результате воздействия на наши органы чувств объектов внешнего мира и т. п. «Учение о представлениях чрезвычайно важно для исследования истинного источника всех наших знаний», — утверждает он [3, с. 209]. 100-е письмо посвящено способности людей к абстрагированию, формированию общих представлений. Представления, приобретенные посредством абстрагирования, Эйлер называет *понятиями*. Он отмечает, что понятие, в отличие от чувственного представления, не связано непосредственно с реально существующим объектом. Понятия, по Эйлеру, — либо индивидуальные, либо общие. Общие понятия образуются путем объединения признаков, общих «для различных представлений»: «По отношению к таким общим понятиям каждый реально существующий объект, который в него входит, является *индивидом*, а общее понятие, например, о вишневом дереве, называют *видом* или *родом*» [3, с. 214]. Род — более общее понятие — включает в себя несколько видов.

Но невозможно говорить о логике, не упоминая о (естественных) языках. 101-е письмо озаглавлено «О языках, их сущности, пользе и необходимости как для взаимного обмена мыслями, так и для развития наших собственных знаний» [3, с. 214]. Он пишет, что язык «содержит множество слов, являющихся ни чем иным, как знаками, соответствующими нашим представлениям, установленными обычаем или молчаливым соглашением многих людей, живущих вместе» [Там же]. При этом подавляющее большинство слов обозначает общие понятия. Эйлер замечает, что точно определить общее понятие перечислением признаков — задача трудная (не просто трудная, сказали бы мы, а практически невозможная). Например, интуитивно ясное понятие человек «есть знак, есть общее понятие о том, что присуще всем людям, и было бы очень трудно сделать перечень всего, что в этом понятии содержится» [3, с. 214–215]. Сначала Эйлер приводит известное платоновское рассуждение: если человек есть двуногое живое существо, тогда петух может служить примером человека, если же сказать, что человек есть двуногое живое существо без перьев, тогда примером человека может служить ощипанный петух. По поводу определения человека как разумного существа он делает ироничное замечание: «Я не знаю, насколько более правы те, кто утверждает, что человек — это живое существо, одаренное разумом. Однако как часто мы принимаем за людей существа, в разумности которых не убеждены!» [Там же].

Начиная со 102-го письма, Эйлер приступает непосредственно к логике, точнее, к графическому представлению логики. Он приводит сжатый очерк принципов логики и использует ставшие общеизвестными круги для *исследования* соотношений между терминами в модусах силлогизмов. Он повторяет, что слова суть знаки общих понятий. Степень совершенства языка зависит от его возможности выражать общие понятия, образованные посредством абстракции, поскольку общие понятия — основа суждений и умозаключений. «*Суждение* есть не что иное, как утверждение или отрицание применимости данного понятия. Суждение, выраженное словами, есть то, что называют *предложением*» [3, с. 217].

Эйлер последовательно трактует понятия с точки зрения их объемов, а выделенные им свойства «содержащего» и «содержимого» позволяют ему использовать круговые схемы:

1. Всё, что есть в содержащемся, находится и в содержимом.
2. Всё, что находится вне содержащего, находится также и вне содержимого.

Составляя круговые схемы, Эйлер стремится к наибольшей *наглядности* рассуждений; наиболее подходящей для достижения этой цели является так называемая объемная точка зрения на понятия, принимающая во внимание объекты, подпадающие под понятие.

Затем Эйлер анализирует классические суждения: утвердительные общие (Всякое *A* есть *B*), отрицательные общие (Ни одно *A* не есть *B*), утвердительные частные (Некоторое *A* есть *B*), и отрицательные частные (Некоторое *A* не есть *B*), изображая их на круговых схемах. Он говорит: «Чтобы зрительно представить особенности этих четырех родов предложений, можно изобразить их в виде фигур... Поскольку в общее понятие входит бесконечное число индивидуальных объектов, можно рассматривать его как некое пространство или круг, внутри которого находятся все эти индивиды» [3, с. 218]. Впрочем, в начале 103-го письма Эйлер замечает, что фигуры, представляющие понятия, не обязательно должны быть кругами, «поскольку не имеет значения, какую *форму* мы им придали».

Утвердительное общее предложение изображается у Эйлера двумя концентрическими кругами, причем круг, изображающий подлежащее, т. е. *A*, находится внутри круга, изображающего сказуемое, т. е. *B*. Общее отрицательное предложение представляется двумя кругами, не имеющими общих точек. Графические представления частных предложений, и утвердительного и отрицательного, совпадают, поскольку каждое из них изображается двумя частично перекрывающими друг друга кругами. Эйлер, поэтому, на кругах, иллюстрирующих предложение «Некоторое *A* есть *B*», букву *A* помещает в пересечении кругов, а в случае отрицательного частного предложения — в части круга, изображающей, как мы бы сказали, пересечение *A* и дополнения *B*. Поскольку «здесь следует обратить особое внимание на то, что есть нечто в понятии *A*, что не входит в понятие *B*, или находится вне этого понятия» [3, с. 219]. Эйлер отмечает, что соответствие между круговыми схемами и предложениями не является взаимно однозначным. Так, схему, представляющую общее отрицательное предложение, т. е. круг *A* вне круга *B*, можно понимать и как «Ни одно *A* не есть *B*», и как «Ни одно *B* не есть *A*». Два круга, имеющих общую часть, можно воспринять четырьмя разными способами: «Некоторое *A* есть *B*», «Некоторое *B* есть *A*», «Некоторое *A* не есть *B*» и, наконец, «Некоторое *B* не есть *A*».

Заметим, что в понимании частных суждений Эйлер отступает от трактовки Аристотеля, в силлогистике которого, равно как и в современной математической логике, «некоторые» понимаются, как «некоторые, а возможно и все». В 107-м письме он разъясняет: «Основная особенность частного суждения в том, что оно не говорит о всех существах, входящих в понятие подлежащего, тогда как в общем суждении говорится обо всех без исключения... Именно этим частные суждения существенно отличаются от общих: они имеют в виду только часть объектов, подразумеваемых подлежащим» [3, с. 240]. Такой подход позволяет Эйлеру «рассматривать *единичное суждение* как суждение *общее*». [Там же].

После того как рассмотрены четыре типа предложений, Эйлер приступает к исследованию силлогизмов на круговых схемах. Сначала он рассматривает формы силлогизмов, первая посылка которых общее предложение, затем — силлогизмы, первая посылка которых частное предложение.

Например, исследование модуса *Barbara* — «Всякое *A* есть *B*», «Всякое *B* есть *C*», следовательно, «Всякое *A* есть *C*» — весьма просто, поскольку область, изображающая *A*, заключена в области, изображающей *B*, которая, в свою очередь, заключена в области *C*. Из предложений «Всякое *A* есть *B*» и «Некоторое *C* есть *A*» выводимо «Некоторое *C* есть *B*». Действительно, вторая посылка изображается двумя пересекающимися кругами, но либо оба эти круга лежат внутри круга *B*, либо круг *C* частично выступает за пределы круга *B*. В обоих случаях пересечение кругов *A* и *C* лежит внутри круга *B*, поэтому вывод правильный.

В 104-м письме, Эйлер приводит таблицу девятнадцати форм правильных силлогизмов, сопровождая ее круговыми схемами. «Достоинство, присущее всем этим девятнадцати формам силлогизмов, — пишет далее Эйлер, — состоит в том, что если два первых предложения правильны, то можно быть уверенным и в правильности заключения» [1, с. 230]. Естественно, что он анализирует и неправильные силлогизмы, например, такой:

Некоторые ученые — скупы.

Ни один скупой не добродетелен.

Следовательно:

Некоторые добродетельные люди не ученые.

Возможно, что это третье предложение — правильно, но оно не вытекает из посылок» [1, с. 232]. Эйлер показывает неправильность этого заключения на кругах. Первое предложение изображается двумя пересекающимися кругами: часть круга *A* содержится в круге *B*. Второе предложение изображается двумя непересекающимися кругами, представляющими *B* и *C*. Ясно, что для взаимного расположения *A* и *C* имеются различные возможности: круг *C*, не пересекаясь с *B*, может пересекаться с *A*, или лежать внутри *A*, или же целиком находиться вне круга *A*. Поскольку из данных посылок нельзя понять, какая из этих возможностей имеет место, последнее предложение нельзя считать следствием первых двух, оно не зависит от этих предложений. Предложенный силлогизм — неправильный.

На основании приведенных примеров можно видеть, что круги у Эйлера — не просто иллюстрации. Изображение расположений кругов, соответствующих данным посылкам, позволяет видеть, определяет ли оно однозначно взаимное расположение кругов, представляющих больший и меньший термины, т. е. фактически сделать вывод из посылок.

Метод Эйлера предполагает перебор всех возможных взаимных расположений кругов, представляющих соответствующие понятия. При исследовании силлогизмов требуется рассматривать взаимоотношения трех терминов, для чего требуется большое количество рисунков. Иллюстрация взаимных отношений понятий принципиально упростилась бы введением понятия универсального класса и рассмотрением в качестве объемов понятий подклассов универсума. Но Эйлер, повторяем, не ставил перед собой цели строить алгебру логики или каким-то иным способом математизировать логику.

Нельзя не отметить методические достоинства изложения Эйлером логики и трактовки ее на круговых схемах. «Письма к немецкой принцессе», как теперь известно, Эйлер писал племянницам Фридриха II и посылал эти письма из Берлина в Магдебург. Относящиеся к логике письма и теперь могут служить прекрасным материалом для предварительного знакомства с силлогистикой, настолько ясно и убедительно они написаны. Приводимые им примеры тоже примечательны, они либо ироничны, как определение понятия «человек», либо являются откликом на действительные события. Так, Эйлер разъясняет гипотетические силлогизмы на таком примере. Пусть первая посылка такая: «Если газеты говорят правду, то мир близок». (Имеется в виду Семилетняя война.) Силлогистический вывод зависит от второй посылки. Возможны два случая. Либо вторая посылка имеет вид «Газеты говорят правду» (и она истинна), тогда вывод — «Мир близок». Либо вторая посылка отрицательна, т. е. «Мир наступит очень нескоро», тогда вывод — «Газеты не говорят правды». Перейдем теперь к другой трактовке логики и остановимся подробнее на некоторых результатах И. Г. Ламберта, младшего современника Л. Эйлера. Не останавливаясь на взаимоотношениях Эйлера и Ламберта, сошлемся на статью А. П. Юшкевича, написанную к 250-летнему юбилею Ламберта [4].

Ламберт известен своими результатами в математике, физике и астрономии. Ему принадлежит доказательство иррациональности чисел e и π, он ввел важные формулы для тригонометрических преобразований, продвинулся в построении неевклидовой геометрии. В отличие от Эйлера, Ламберт имел в виду создание алгебраической логики, о чем свидетельствуют записи (чрезвычайно краткие) в Ежемесячнике, который он вел начиная с января 1752 г. до конца жизни. Так, февралем 1752 г. датируется его запись: «Методы логики, примыкающие к Характеристике», аналогичная пометка имеется в марте следующего года [5, с. 12–13]. Здесь Ламберт, безусловно, имеет в виду универсальную характеристику Лейбница. В декабре 1853 г., вероятно, впервые в истории логики, встречается термин а*лгебраическая логика*.

Ламберт предполагает использование буквенных обозначений, поскольку самые известные и употребительные знаки понятий, слова, непригодны для алгебраических действий. Изучению символов в разных областях знаний Ламберт уделял большое внимание, он исследовал иероглифы, эмблемы, геральдическую символику, музыкальные обозначения, обозначения в химии, астрономии, отмечал достоинство цифровых обозначений, выразительные возможности двоичной системы счисления.

Результаты изысканий Ламберта в логике изложены им в двух опубликованных им сочинениях «Новый органон» (1764) [6], «Введение в архитектонику» (1771) [7], а также в работе «Шесть опытов знакового искусства», которая вошла в состав опубликованных посмертно двухтомных «Логических и философских сочинений» [8, Bd. 1]. В «Опытах» предпринята наиболее успешная попытка построить вариант, как мы сказали бы, логического исчисления. Разумеется, «исчислением» в строгом смысле «знаковое искусство» не является, оно представляет собой лишь более или менее продвинутый проект. Прежде всего, Ламберт сохраняет в логике все или, по крайней мере, большинство алгебраических операций, включая использование отличных от нуля и единицы числовых коэффициентов и показателей степени. Ламберт обозначает посредством a, b, c... данные понятия, l, m, n... — неопределенные понятия, x, y, z... — неизвестные понятия, γ — символ рода, δ — видового отличия. Он вводит символы для операций и отношений:

\+ *сложение* (составление), для выражения союза «и» или предлога «с»,

— *вычитание* (отделение) признаков,

роль умножения играет *определение*, или *связывание* — присоединение новых признаков. Ламберт обозначает эту операцию знаком умножения или отсутствием символа операции. Например, если R — роза, n — красное, то nR — красная роза.

: *деление — отвлечение*, или *отделение* (признака), иногда обозначаемое знаком минус,

× *противоположение* (например, «добро» и «зло» противоположны по смыслу),

• символ для отрицания, он используется, если в языке для данного слова нет противоположного, значит, нельзя использовать знак ×,

:: знак для метафизического отношения,

= равнозначность (отношение тождества),

\> всеобщее,

< особенное.

Использование «знакового искусства» состоит в преобразовании исходных данных по правилам, аналогичным алгебраическим, с тем чтобы выразить неизвестные понятия через известные или данные по условиям задачи, ибо, как было замечено давно, между выводом следствий из посылок и решением уравнений в алгебре имеется глубокая аналогия. Отсюда и встает проблема составления и решения логических уравнений, поскольку в то время основным предметом алгебры как раз и была теория уравнений. Ламберт составляет уравнения относительно букв, как правило, обозначающих признаки, и решает их, применяя обычные алгебраические преобразования. В достаточно простых случаях он получает уравнения вида $mA = nB$. Пусть требуется выразить общее утвердительное предложение «Все A суть B», здесь возможны два случая: либо A совпадает с B, и тогда $A = B$, либо содержание A больше, чем содержание B, тогда $A > B$.

(В этом случае объем A меньше, чем объем B; круг, представляющий A, находится внутри круга B.) Для получения равенства в последнем случае требуется добавить к A новые признаки, «уравнять» его с B, получится $A = mB$. Если требуется представить в виде равенства общее отрицательное предложение «Ни одно A не есть B», то это означает, что субъект обладает признаками, не присущими предикату. Обозначим их m. И, наоборот, у предиката имеются признаки (n), отсутствующие у субъекта. Чтобы «уравнять» субъект и предикат, от каждого из них следует отделить признаки, не присущие другому, получится $\frac{A}{n} = \frac{B}{m}$.

В более сложных случаях в результате «уравнивания» признаков получаются довольно громоздкие коэффициенты. Если требуется получить вывод из двух посылок, заданных словесно, то каждую из них следует выразить равенством, а затем преобразовывать эти равенства как обычные алгебраические выражения.

После получения итогового равенства, его нужно истолковать, т. е. перевести на обычный язык. Пусть, например, даны посылки

$$\frac{m}{p}A = \frac{n}{q}B \text{ и } \frac{r}{s}C = \frac{t}{u}B,$$

тогда $B = \dfrac{mq}{np}A$, $B = \dfrac{ru}{ts}C$, откуда $\dfrac{ru}{ts}C = \dfrac{mq}{np}A$. Это и есть заключение, которое теперь требуется истолковать. Но истолковать решение оказывается труднее, чем сделать вывод обычным образом, не прибегая к составлению и решению уравнений. Видимо, не случайно Ламберт не спешил с публикацией своих «Опытов знакового искусства».

Ламберт отмечает, что символы в алгебре имеют разный характер, одни из них обозначают величины, другие представляют операции, третьи — отношения. Аналогичную роль играют символы и в его «искусстве». Кроме перечисленных выше затруднений в применении «знакового искусства», можно указать и на такое: в этом исчислении трудно отличить одну от другой операции сложения и умножения, а также вычитания и деления. Это связано с тем, что Ламберт не рассматривает понятия с точки зрения объема, оперировать же «алгебраически» с признаками практически невозможно, хотя бы потому, что ни у одного понятия нельзя явно указать все признаки.

Ламберту принадлежит и попытка построения алгебры отношений. Для начала он классифицирует отношения: простое отношение (Ratio) есть признак, благодаря которому одно понятие выражается через другое; составное отношение (Relatio) выражает данное понятие через некоторые другие. Ламберт различает, кроме того, логические и метафизические отношения. Первые из них характеризуют понятия количественно, вторые говорят о свойствах признаков. Так, отношения тождества, подобия и т. д. — логические, поскольку говорят о количестве общих признаков у понятий, а причинно-следственная связь между понятиями служит примером метафизического отношения.

Для указания на метафизическое отношение Ламберт использует символ «::», например, если A, B — понятия, N — метафизический признак, то выражение $A = N :: B$ означает, что между A и B имеется метафизическое отношение. Поделив обе части равенства на N, Ламберт получает $A / N = N :: B / N = B$. Этот результат требуется истолковать. Задача истолкования решается легко, говорит Ламберт, если только данное отношение имеет противоположное, т. е. нам известно это противоположное отношение.

Приведенный пример показывает, что решение уравнений в логике должно иметь иной смысл, чем в алгебре. В алгебре, решая уравнение, мы находим числовое значение неизвестного, в логике же мы стремимся выразить одни понятия через другие, при этом все понятия нам известны. Как указывал в 1884 г. наш соотечественник П. С. Порецкий, решение уравнений в логике означает вывод следствий из данных посылок, представленных в виде этих уравнений.

Подводя итог, можно сказать, что, обращаясь к логике, Эйлер и Ламберт ставили перед собой разные цели и решали разные задачи. Эйлер имел в виду наглядно показать основные принципы силлогистики. При этом он выбрал исключительно удачный прием — истолковывать понятия по их объемам. Он не собирался строить логическое исчисление, но подход для возможного построения выбрал наилучший. Если бы он еще рассмотрел понятия как подклассы некоего универсального понятия, он мог бы получить более компактные рисунки, однако, скорее всего, доходчивость при этом была бы утрачена.

Ламберт не выдерживал последовательно объемный принцип; там, где он прибегал к графическим иллюстрациям, он истолковывал понятия по объему, но операции определял применительно к признакам понятий. То обстоятельство, что Ламберт не перенес принцип объемности в свое «знаковое искусство», помешало ему в достижении его цели — построении «логической алгебры». Он не создал логического исчисления, подобного логике классов XIX века, однако сделал много интересных наблюдений, поставил важные проблемы, решение которых было делом ученых следующего столетия. Тогда в методы построения алгебры логики и были внесены принципиальные изменения: введено понятие универсума (универсального класса), стали оперировать подклассами универсума, для чего были введены операции сложения, умножения классов и дополнения класса до универсума и т. д.

В 1847 г. были опубликованы «Формальная логика» Де Моргана [9] и «Математический анализ логики» Дж. Буля [10], — сочинения, в которых впервые содержится алгебра логики (булева алгебра). Понятие универсума, по-видимому, впервые использовал Де Морган не позднее 1839 г. Именно введение универсума позволяет строить алгебру логики как исчисление классов. Объемы понятий (классы) рассматриваются как подмножества универсума, над которыми осуществляются операции: сложение (объединение), умножение (пересечение); наличие универсума делает определенным отрицание, представленное как дополнение данного класса до универсума. Таким образом, оказываются определенными все операции так называемой логики классов (алгебры логики).

Идея использовать графический аппарат, по крайней мере, для иллюстрации соотношений между классами (объемами понятий) не была слишком нова. Но мысль использовать круговые схемы для наглядного представления объектов и операций алгебры логики возникла не сразу. Де Морган, например, пытался дать геометрическое истолкование на своеобразных линейных схемах, но отчетливо проиллюстрировать силлогизмы он не смог. Обобщение метода Эйлера было осуществлено Дж. Венном [11], [12]. В основе метода Венна лежит идея разложения универсума на конституенты, это — одна из основополагающих идей алгебры логики. Каждый класс делит универсум на две части, конституенты: данный класс и его дополнение. Два класса дают четыре подкласса. В случае n классов иллюстрирующая плоскость делится на 2^n областей посредством любых n замкнутых контуров, и каждой области ставится в соответствие одна из конституент универсума. Пусть в условиях задач фигурируют три класса, обозначим их A, B, C. Эти классы образуют восемь подклассов (конституент): ABC, $\bar{A}BC$, $A\bar{B}C$, $AB\bar{C}$, $A\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}B\bar{C}$, $\bar{A}\bar{B}C$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, буква с чертой здесь обозначает дополнение класса. Для построения диаграммы, представляющей три класса, Венн делит плоскость на восемь областей посредством трех окружностей. Каждая из этих областей соответствует одному из перечисленных подклассов. Так, область, лежащая вне части плоскости, ограниченной окружностями, соответствует $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. На диаграмме Венн заштриховывает области, соответствующие пустым, по условию задачи, классам; незаштрихованные области позволяют выразить требуемый класс через остальные классы. Ясно, что с ростом числа классов наглядность диаграмм уменьшается, сам Венн рассматривал случаи, в которых число классов не превышало пяти. Следует заметить, что Венн создавал свои диаграммы не просто как один из способов символического представления логики классов, не только с целью наглядного изображения информации, но как аппарат для решения задач логики классов, как инструмент для вывода следствий из посылок. Однако эта тематика выходит далеко за рамки настоящей статьи. Заметим лишь, что, как было указано выше, представление силлогизмов на круговых схемах и Эйлер рассматривал как метод их исследования, а не просто как способ наглядного изображения. Ведь и теперь на занятиях со студентами мы считаем вполне допустимым использование диаграмм для доказательства некоторых равенств алгебры множеств.

Литература

1. *Leibniz G.* Dissertatio de Arte Combinatoria, cum appendice. Lipsi, 1666.
2. *Bernoulli Jacques, Bernoulli Jean.* Parallelismus ratiocinii logici et algebraici. Basel, 1685.
3. *Эйлер Л.* Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях. СПб.: Наука, 2002.
4. *Юшкевич А. П.* И. Г. Ламберт и Л. Эйлер // ИМИ. Вып. 25. 1980. С. 189–224.
5. *Lambert J. H.* Monatsbuch // Abhangung Kon. Bayer Akad. Wissenschaft. Math.-phys. Kl. 6 Abh. 1915. S. 12–33.
6. *Lambert J.* Neues Organon, oder Gedanken ueber die Erforschung und Bezeichnung des Wahres und dessen Unterscheidung von Irrtum und Schein. Bd. 1, 2. Leipzig, 1764.
7. *Lambert J.* Anlage zur Architektonik, oder Theorie des Einfaches und der Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntniss. Bd. 1, 2. Riga, 1771.
8. *Lambert J.* Sechs Versuche einer Zeichenkunst in der Vernunftlehre // Logische und philosophische Abhandlungen. Bd. 1, 2. Berlin, 1778–1782.
9. *De Morgan A.* Formal logic, or the calculus of inference, necessary and probable. London, 1847.
10. *Boole G.* The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning. London, 1847.
11. *Venn J.* On the diagrammatical and mechanical representation of propositions and reasoning // Philos. Magazine. July, 1880.
12. *Venn J.* Symbolic logic. 2 ed. London, 1881.

Г. К. Михайлов
Москва, Россия

Леонард Эйлер и становление рациональной механики

Abstract: One believes sometimes that the so-called Newton mechanics was created by Newton himself in his "Principia". In fact, Newton has formulated only the basic laws of mechanics and solved a broad circle of problems of particle dynamics (including some problems of celestial mechanics). But Newton has not proposed any promising approaches for constructing dynamics of mechanical systems, rigid body and continuum mechanics. The formation of "Newton Mechanics" is connected essentially with the work of Euler: he expressed Newton's laws in terms of the mathematical analysis giving them a generalized sense, established rigid body mechanics and hydrodynamics and paved the way for the development of continuum mechanics. The following essay gives a sketch of Euler's contribution to the formation of rational mechanics.

Становление рациональной механики неразрывно связано с трудами Леонарда Эйлера, открывшего пути для ее дальнейшего развития[1].

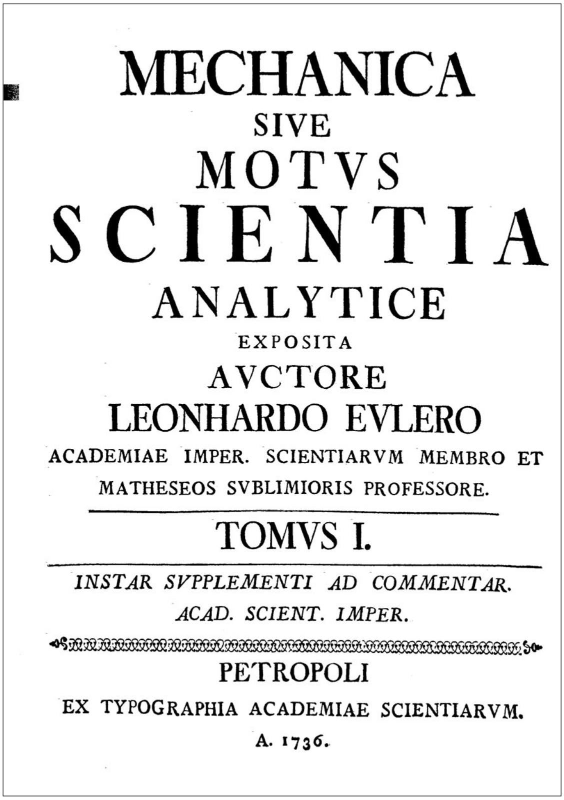
Работы Эйлера по механике составляют примерно одну треть всех его трудов. Надо подчеркнуть, что механика была первым серьезным увлечением Эйлера. В сохранившихся «записных книжках», которые он вел в возрасте восемнадцати–двадцати лет, уже содержатся подробные планы задуманных им общих трактатов по динамике точки и теории движения жидкостей. О живом интересе Эйлера к механике свидетельствует и сравнительный анализ его опубликованных сочинений, написанных им за первые 10 лет научного творчества (1726–1735). Из общего их объема, составляющего около тысячи восьмисот страниц[2], почти две трети посвящены механике и только четверть — высшей математике.

1. Основные исходные понятия механики и законы движения были подытожены и четко сформулированы в «Началах» Ньютона (1687). Однако у Ньютона недоставало еще многих существенных элементов, прежде всего, для построения механики системы, твердого тела и сплошной среды. Главным сдерживающим препятствием оставалось и то, что «Начала» были изложены с помощью геометрического метода древних, не открывавшего пути для дальнейшего продвижения. Первая попытка изложить всю динамику в несколько более простом и систематическом виде, с использованием элементов математического анализа, была предпринята Якобом Германом в его «Форономии» (1715/1716).

Основы дифференциального и интегрального исчисления были заложены на рубеже XVIII века. Перед математикой и механикой стояла задача всесторонней разработки этого аппарата и применения его для исследования разнообразных приложений. Ни в математике, ни, тем более, в механике еще не существовало общей системы. Требовалось использовать богатые возможности математического анализа, чтобы поднять теоретические и прикладные разделы математического естествознания от состояния совокупности отдельных искусных приемов и решенных задач до уровня систематически построенной науки. Решению этой задачи и было посвящено, главным образом, творчество Эйлера.

Молодой Эйлер поначалу направил свои усилия на упорядочение динамики точки и последовательное переложение ее на язык математического анализа. Свои первые замыслы Эйлер реализовал в «Механике» (E15–16; 1736)[3], которая была опубликована в двух томах в качестве «Приложения» к «Комментариям» Петербургской Академии наук.

В общем примечании к первой главе первого тома «Механики» Эйлер поместил общий план построения всей механики, как она представлялась ему в середине 30-х годов: «Сначала мы будем рассматривать тела бесконечно малые, т. е. те, которые могут рассматриваться как точки. Затем мы приступим к телам, имеющим конечную величину, — тем, которые являются твердыми, не позволяя менять своей формы. В-третьих, мы будем говорить о телах гибких. В-четвертых, о тех, которые допускают растяжение и сжатие. В-пятых, мы подвергнем исследованию движение многих разъединенных тел, из которых одни препятствуют другим выполнить свои движения так, как они стремятся это сделать. В-шестых, будет рассматриваться движение жидких тел. По отношению к этим телам мы будем рассматривать не только то, как они, предоставленные сами себе, продол-



MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.

TOMVS I.

INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.

Титульный лист «Механики» Леонарда Эйлера жают движение, но, кроме того, мы будем исследовать, как на эти тела воздействуют внешние причины, т. е. силы» [1, с. 89–90].

Прежде чем говорить об отдельных результатах Эйлера в механике, сделаем одно общее замечание о месте его работ в ряду трудов его современников. Среди близких Эйлеру по возрасту ученых-механиков первого ранга надо назвать Даниила Бернулли, Клеро и Даламбера. Первое место в этой плеяде, безусловно, занимал Даламбер, а среди младших современников Эйлера – Лагранж. Но Лагранж и его «Аналитическая механика» олицетворяют собой уже следующий за Эйлером этап в математизации механики. С Даламбером у Эйлера сложились непростые отношения. Исследования Даламбера пересекались с работами Эйлера практически во всех разделах механики. Особенно тесно переплетались они в динамике твердого тела, в подходах к построению гидродинамики идеальной жидкости и в теории колебания струн. Даламбер был, бесспорно, гениальнейшим соперником Эйлера в механике. Ему принадлежали выдающиеся идеи, часто опережавшие исследования Эйлера, но Даламбер пользовался устаревшим, тяжеловесным математическим языком, и его идеи были выражены в труднодоступной, неясной форме. Эйлер же придал новый строгий стиль изложению точных наук. В результате, для большинства конкурирующих работ Эйлера и Даламбера будущее осталось за работами Эйлера[4].

2. В «Механике» Эйлер впервые систематически изложил динамику свободной материальной точки и точки, находящейся на заданной кривой или поверхности. Им было последовательно изучено движение точки в случае отсутствия сопротивления (в пустоте) и в сопротивляющейся среде. Исследование было проведено в естественных координатах, связанных с траекторией движения. Говоря о механике системы, следует отметить, что Эйлер не посвятил ей, как таковой, ни одной самостоятельной работы, хотя, конечно, многократно рассматривал различные задачи динамики механических систем и включил этот раздел в свой первоначальный план изложения всей механики. Для объяснения причины этой непоследовательности напомним, что общий метод исследования механических систем был предложен Даламбером в его «Трактате по динамике» (1743). Не входя в подробности, отметим, что Эйлер уже в 30-х годах располагал предпосылками достаточно общего метода, эквивалентного принципу Даламбера, и развивал в последующем свой подход к задачам динамики механических систем в духе идей Ньютона вполне самостоятельно. Вероятно, именно поэтому Эйлер не ссылался никогда на «принцип Даламбера» и, в то же время, никогда не излагал идею своего общего подхода в качестве отдельного метода, чтобы не входить в приоритетный спор с Даламбером.

Отметим один частный результат Эйлера, относящийся к механике относительного движения, изложенный в сочинении «О движении тел на подвижных поверхностях» (Е86; 1746), где Эйлер впервые получил, одновременно с Д. Бернулли, закон сохранения момента количества движения. При решении задач Эйлер в этой работе систематически вычислял абсолютные ускорения в составном движении (в горизонтальной плоскости), разлагая их вдоль направлений относительного и переносного движения. В этих разложениях легко усматриваются относительное, переносное и дополнительное (кориолисово) ускорения. Аналогичные разложения абсолютных ускорений Эйлер широко использовал позже при исследовании течения воды во вращающихся трубах. Однако Эйлер не заметил в структуре этих разложений общего свойства, обнаруженного впоследствии Кориолисом. Пример дифференциального уравнения движения системы n тел появляется у Эйлера во второй половине 40-х годов, при исследовании задачи о движении системы шарнирно соединенных жестких стержней на гладкой горизонтальной плоскости (E174; 1751).

Развитие механики систем с конечным числом степеней свободы было тесно связано в первой половине XVIII века с теорией колебаний. Не останавливаясь специально на этом важном для общей истории динамики ее разделе, необходимо отметить, что в 30-х и в начале 40-х годов Эйлер (наряду с Даниилом и Иоганном Бернулли) внес существенный вклад и в его развитие. Большое значение имело для развития теории колебаний открытие Эйлером способа интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В частности, уже в 1739 г., на примере синусоидально возбуждаемого осциллятора Эйлер открыл явление резонанса (E126; 1750).

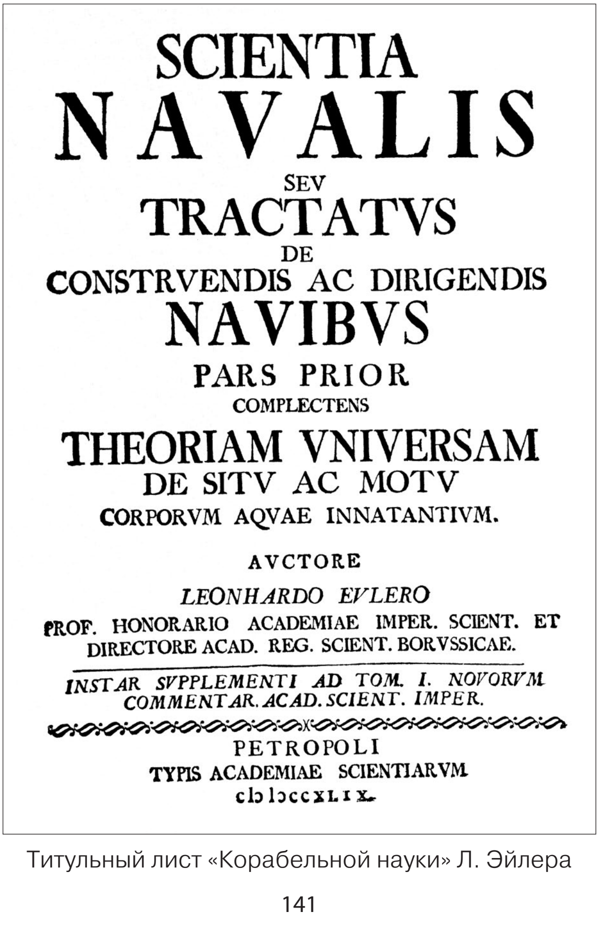
С середины 40-х годов Эйлер посвящает много работ небесной механике. Основное место здесь занимают различные аспекты задачи трех тел — теория движения Луны, теория возмущения планетных движений и, наконец, с 60-х годов, собственно задача трех тел в чистом виде. Наряду с этим, Эйлеру принадлежат, конечно, и исследования методов определения невозмущенных орбит, в том числе кометных орбит, для которых он получил, например, известное уравнение, выражающее интервал времени через сумму радиус-векторов и хорду и остававшееся до последнего времени основой вычисления параболических орбит. Вклад Эйлера в становление и развитие небесной механики весьма значителен. Однако часто в современной литературе методы Эйлера связываются с именами других ученых, которые лишь усовершенствовали его методы. Кроме того, надо сказать, что история небесной механики в XVIII веке вообще до сих пор не изучена должным образом. Обычно уже в XIX веке исследователи не обращались к источникам, предшествовавшим «Трактату по небесной механике» Лапласа, который обобщил основные достижения того времени в этой области. Впрочем, сам Лаплас высоко ценил вклад Эйлера в небесную механику и, особенно, в теорию движения планет.

Действительно, можно считать, что теория возмущений планетных движений ведет свое начало от мемуара Эйлера о неравенствах в движениях Юпитера и Сатурна, представленного на конкурс Парижской Академии наук в 1747 г. (E120; 1749). Этот мемуар Эйлера, вместе с трактатом Даламбера о предварении равноденствий и нутации земной оси (опубликованном в Париже в том же году) и «Теорией Луны» Клеро (представленной на конкурс Петербургской Академии наук в 1750 г. и опубликованной в 1752 г.), может по справедливости считаться отправной точкой всей современной небесной механики (если не принимать, конечно, во внимание «Начала» Ньютона). Заметим, что в этой и других работах Эйлера конца 40-х годов уже содержится идея метода вариации элементов, развитого им подробнее в последующих трудах.

Любопытно, что в 40-х годах Эйлер стал сомневаться в строгой справедливости закона Ньютона всемирного тяготения. Это сомнение опиралось как на некоторые общие соображения, так и на отдельные ошибки, допущенные Эйлером в вычислениях планетных возмущений. И только выполненное Клеро (в только что упомянутом сочинении) исследование движения апогея Луны убедило

Эйлера в точности закона Ньютона. В дальнейшем Эйлер продолжил исследования движений Юпитера и Сатурна, представив следующий свой мемуар на эту тему Парижской академии в 1752 г. Как подчеркнул М. Ф. Субботин, «развитая им здесь идея нахождения возмущенных значений эксцентриситетов и долгот перигелиев... является, по существу, зародышем теории представления вековых возмущений в тригонометрической форме, ..., развитой позднее Лагранжем» [2, с. 299][5]. Впоследствии Эйлер внес много других усовершенствований в теорию возмущений. Так, например, ему принадлежит эффективный численный метод интегрирования уравнений возмущенных движений в прямоугольных координатах. Отметим еще большой цикл работ Эйлера по внедрению в теорию планетных возмущений мощных методов, развитых в теории движения Луны.

Первые исследования Эйлера о движении Луны подытожены в его берлинской монографии (E187; 1753). На основе развитой здесь теории Тобиасом Майером были вычислены таблицы Луны, удостоенные впоследствии Британским парламентом денежной премии (с выплатой одной десятой части суммы Эйлеру). Но наиболее интересна вторая теория движения Луны Эйлера (E418; 1772), опубликованная в Петербурге. Первоначально она не привлекла широкого внимания астрономов вследствие своей сложности. Но через 100 лет этой теорией заинтересовался Хилл, который развил заложенные в ней идеи и опубликовал в



SCIENTIA
NAVALIS
SEV
TRACTATVS
DE
CONSTRVENDIS AC DIRIGENDIS
NAVIBVS
PARS PRIOR
COMPLECTENS
THEORIAM VNIVERSAM
DE SITV AC MOTV
CORPORVM AQVAE INNATANTIVM.

AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
PROF. HONORARIO ACADEMIAE IMPER. SCIENT. ET
DIRECTORE ACAD. REG. SCIENT. BORVSSICAE.

INSTAR SVPPLEMENTI AD TOM. I. NOVORVM
COMMENTAR. ACAD. SCIENT. IMPER.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
cIↄ Iↄccxlix.

Титульный лист «Корабельной науки» Л. Эйлера

1870-х годах две работы, ставшие одним из важнейших источников дальнейшего прогресса всей небесной механики. Записанные Эйлером в прямоугольных координатах, уравнения движения Луны оказались типичными для теории нелинейных колебаний; продолженные Хиллом исследования Эйлера по методам их интегрирования внесли значительный вклад в общую теорию нелинейных колебаний.

Необходимо отметить участие Эйлера в начальной разработке первого интегрального вариационного принципа механики — принципа наименьшего действия, первоначально высказанного в нечеткой, но претенциозной форме президентом Берлинской академии Мопертюи. Эйлеру принадлежит, по существу, первая строгая формулировка этого принципа для движения материальной точки, вместе с разработанным им аппаратом вариационного исчисления. Однако в том виде, который носил принцип наименьшего действия у Эйлера, он еще не был пригоден для решения новых задач механики. Дальнейший прогресс был достигнут после обобщения Лагранжем этого принципа на механические системы, за чем последовала в XIX в. разработка классических интегральных вариационных принципов, переросших, в конечном итоге, рамки самой механики.

3. Выдающийся вклад был внесен Эйлером в создание общей теории движения твердого тела. Первоначально, в конце 30-х годов, при подготовке своей «Корабельной науки» (E110–111; 1749), напечатанной в Петербурге, Эйлер занимался некоторыми частными задачами динамики твердого тела. В этом большом двухтомном сочинении мы находим разложение движения корабля на поступательное и вращательное, попытку расчета малых колебаний корабля на воде, продвинутое учение об устойчивости равновесия плавающих тел, элементы учения о моментах инерции.

К общей теории движения твердого тела Эйлер вернулся в 1749–1750 гг. Известным побуждением к тому послужили, по-видимому, исследования Даламбера, вошедшие в его трактат о предварении равноденствий и нутации земной оси и содержавшие определенные подходы к теории вращения твердого тела. Первый решающий шаг для построения динамики твердого тела был совершен Эйлером в мемуаре «Открытие нового принципа механики» (E177; 1752). Здесь Эйлер изложил «общий и фундаментальный принцип всей механики», который, по существу, заключался в применении основного закона динамики (второго закона Ньютона) для каждой бесконечно малой частицы в проекциях на оси неподвижной системы координат:

$$Md^2x = Pdt^2, \quad Md^2y = Qdt^2, \quad Md^2z = Rdt^2,$$

где M — масса частицы, а P, Q и R — составляющие внешних сил (Эйлер записывает эти уравнения с коэффициентом 2 в левой их части, что объясняется применявшейся тогда системой физических единиц, в которой ускорения безразмерны, а скорости измеряются специальным образом). В своем мемуаре Эйлер писал, что «именно на этом единственном принципе должны быть основаны все другие принципы, как те, которые уже получены в механике и гидравлике и которыми пользуются сейчас для определения движения твердых и жидких тел, так также и те, которые пока еще неизвестны и которые нам нужны для развития как указанных выше случаев твердых тел, так и многих других, которые относятся к жидким телам».

Итак, новый принцип Эйлера включал выделение элементарной частицы из сплошной среды и применение к ней основного закона Ньютона, записанного в проекциях на оси неподвижной системы координат. Сейчас трудно себе даже представить тот импульс, который придала механике эта работа Эйлера, которая кажется нам сегодня самоочевидной. Но именно она открыла самый простой и естественный путь для построения динамики твердого тела и, главное, механики сплошной среды.

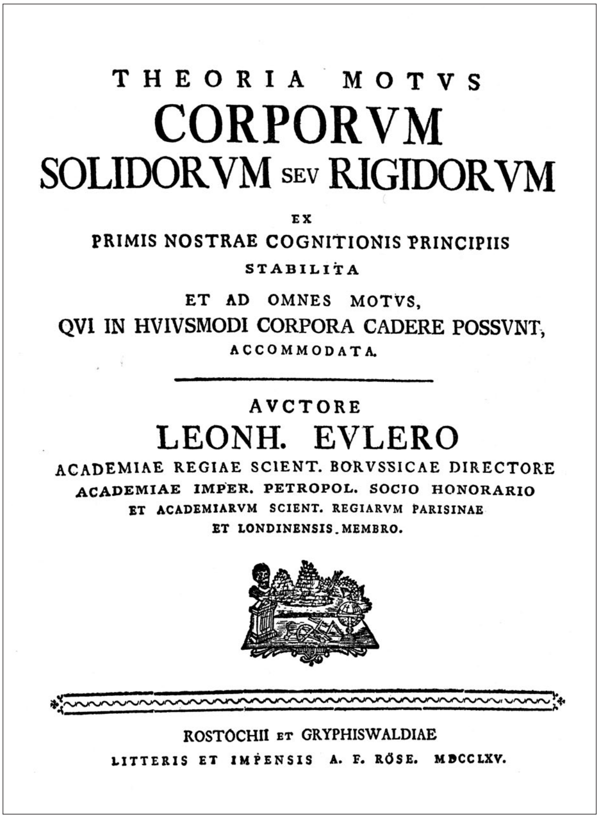
Справедливости ради надо отметить, что запись основного закона динамики в проекциях на оси неподвижной системы координат применительно к изучению движения материальной точки была предложена в качестве самостоятельного «принципа» механики еще Маклореном в его «Трактате о флюксиях» (1742). В 40-х годах такая запись уравнений движения уже использовалась рядом ученых, в том числе и самим Эйлером. Однако никому до Эйлера не пришла в голову мысль о том, что эти дифференциальные уравнения, будучи выписаны для произвольного элемента среды (или тела), непосредственно приводят к математической формулировке общих задач механики. (Необходимость независимого привлечения также и закона момента количества движения была, по-видимому, осознана Эйлером значительно позже.)

На основании этого подхода Эйлер сразу же вывел общие уравнения вращения твердого тела, однако представил их первоначально в малоудобной для исследования форме, отнесенной к неподвижной системе координат, вводя моменты инерции тела (относительно неподвижных осей), которые меняются в процессе движения тела.

В 1755 г. Сегнер опубликовал небольшое сочинение, посвященное исследованию свободных осей вращения произвольных тел. Понятие свободной оси вращения использовалось Эйлером ранее в его «Корабельной науке», но там он не утверждал еще, что каждое тело, как это установил Сегнер, имеет три взаимно перпендикулярные оси свободного вращения. По признанию Эйлера, ознакомление с работой Сегнера побудило его вернуться к изучению вращения твердых тел и дало в руки путеводную нить для построения компактной общей теории. В результате, в своих работах по теории вращения твердых тел, относящихся к концу 50-х годов (но опубликованных в «Мемуарах» Берлинской академии лишь в 1765 г.), Эйлер использовал в качестве основной системы координат главные оси инерции тела, являющиеся свободными осями вращения, и придал общим динамическим уравнениям ставшую ныне классической (с точностью до обозначений) форму:

$$dx+\frac{c-b}{a}yzdt=\frac{Pdt}{Ma},\ dy+\frac{a-c}{b}xzdt=\frac{Qdt}{Mb},\ dz+\frac{b-a}{c}xydt=\frac{Rdt}{Mc}.$$

Здесь M — масса, a, b, c — главные центральные моменты инерции тела (обозначавшиеся у Эйлера через aa, bb и cc), P, Q, R — моменты внешних сил (Эйлер записывает эти уравнения с коэффициентом $2g$ в правой их части, что объясняется уже упоминавшимся выше использованием отличной от современной системы физических единиц). Тогда же Эйлер исследовал и знаменитый первый случай интегрируемости в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки — центра масс. Эйлеру принадлежит, наконец, и разработка кинематики твердого тела, включая вывод обеих форм кинематических уравнений вращения



THEORIA MOTVS
CORPORVM
SOLIDORVM SEV RIGIDORVM
EX
PRIMIS NOSTRAE COGNITIONIS PRINCIPIIS
STABILITA
ET AD OMNES MOTVS,
QVI IN HVIVSMODI CORPORA CADERE POSSVNT,
ACCOMMODATA.

AVCTORE
LEONH. EVLERO
ACADEMIAE REGIAE SCIENT. BORVSSICAE DIRECTORE
ACADEMIAE IMPER. PETROPOL. SOCIO HONORARIO
ET ACADEMIARVM SCIENT. REGIARVM PARISINAE
ET LONDINENSIS MEMBRO.

ROSTOCHII ET GRYPHISWALDIAE
LITTERIS ET IMPENSIS A. F. RÖSE. MDCCLXV.

Титульный лист «Теории движения твердых тел» Л. Эйлера

(одну из которых иногда называют уравнением Пуассона), а равно и развернутое учение о моментах инерции (геометрия масс), за исключением, впрочем, построения эллипсоида инерции.

Завершением основного этапа исследований Эйлера по динамике твердого тела явился его трактат «Теория движения твердых тел» (E289; 1765), который он закончил в 1760 г. и считал третьим томом своей «Механики».

Эйлер продолжал заниматься динамикой твердого тела и в последующие годы. В частности, в его сочинении «Новый метод определения движения твердых тел» (E479; 1776) впервые выписаны совместно шесть уравнений движения произвольного тела, представляющие законы количества движения и момента количеств движения:

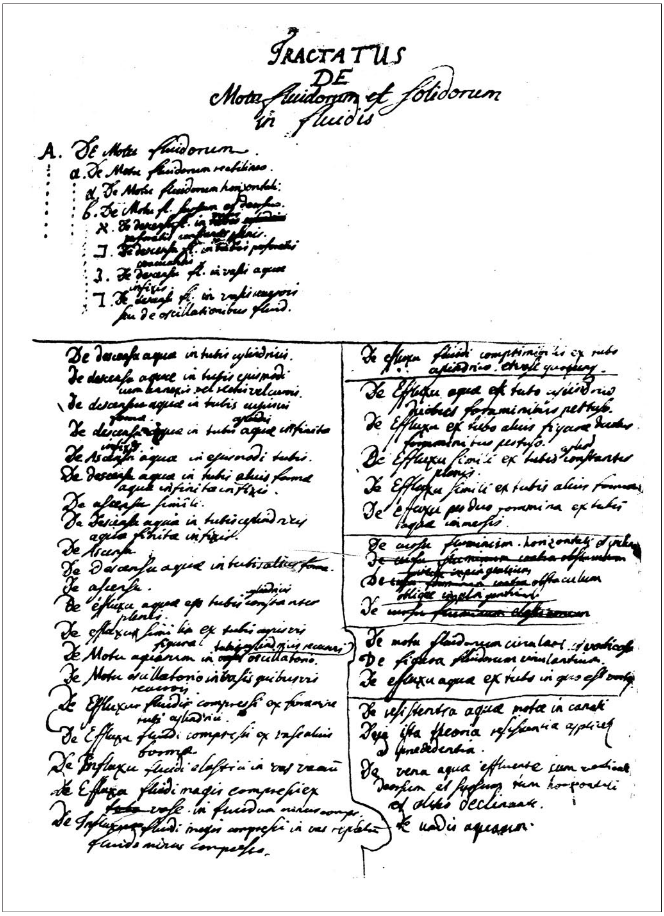
$$\int dM \frac{d^2x}{dt^2} = P,\ \int z dM \frac{d^2y}{dt^2} - \int y dM \frac{d^2z}{dt^2} = S,$$

$$\int dM \frac{d^2y}{dt^2} = Q,\ \int x dM \frac{d^2z}{dt^2} - \int z dM \frac{d^2x}{dt^2} = T,$$

$$\int dM \frac{d^2z}{dt^2} = R,\ \int y dM \frac{d^2x}{dt^2} - \int x dM \frac{d^2y}{dt^2} = U.$$

(У Эйлера эти уравнения записаны с дополнительным коэффициентом в правой их части, как и в приведенной выше системе уравнений.) Клиффорд Трусделл считает это место у Эйлера первым в истории механики появлением обоих этих законов в качестве «*фундаментальных, общих и независимых законов механики* для всех видов движений всех видов тел». В связи с этим Трусделл предложил называть совокупность этих законов «*законами механики* Эйлера» [3, с. 260].

4. Эйлеру принадлежит разработка фундаментальных основ механики жидкости и газа. Интерес Эйлера к задачам движения жидкости проявился еще в юношеские годы. Под влиянием Иоганна Бернулли он использовал тогда при исследовании истечения жидкости из сосудов закон живых сил, воспользовавшись, наряду с этим, применявшейся уже ранее гипотезой плоских сечений и соответствующей ей формой условия неразрывности. Свои результаты Эйлер доложил Петербургской академии в двадцатилетнем возрасте в августе 1727 г., через две недели после аналогичного доклада Даниила Бернулли. Результаты



TRACTATUS
DE
Motu fluidorum et solidorum
in fluidis

A. De Motu fluidorum.

Страничка из записной книжки Л. Эйлера
с проспектом трактата по гидравлике

обоих авторов совпали, и в этой деликатной ситуации Эйлер уступил право публикации полученных результатов своему старшему товарищу, полностью прекратив свои собственные исследования в этой области на четверть века.

Только в середине XX века автор обнаружил и опубликовал рукопись Эйлера 1727 года [4, т. 2, с. 253–280, 542–571], содержащую те же результаты, что и полученные Даниилом Бернулли. Любопытно что набросанный Эйлером еще в Базеле проспект трактата о движении жидкости схож с планом последующей «Гидродинамики» Даниила Бернулли (1738). Более того, Эйлер оказал большое влияние и на подготовку «Гидравлики» Иоганна Бернулли (1743) (см. [5]).

Сам Эйлер вернулся к общим проблемам движения жидкости лишь в начале 50-х годов, уже после публикации «Гидродинамики» Даниила Бернулли (1738) и «Гидравлики» Иоганна Бернулли (1743). К этому времени Эйлер окончательно выработал два необходимых для общего построения гидродинамики представления: четкое понятие о давлении в текущей жидкости и простую формулировку основного закона динамики (закона импульса) для элементарной частицы среды. Данное Эйлером определение давления явилось рафинированным завершением эволюции этого понятия, возникшего в 1730 г. у Даниила Бернулли и усовершенствованного отчасти Иоганном Бернулли.

Первые подходы к выводу общих континуальных уравнений движения жидкости были предприняты в самом конце 40-х годов Даламбером. Свои гидродинамические исследования он представил в конце 1749 г. на конкурс Берлинской академии и позже опубликовал в Париже (1752). Наряду с соображениями о сопротивлении жидкостей, в его сочинении содержалось рассмотрение непрерывного поля скоростей и вывод дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение жидкости в некоторых случаях. Хотя и насыщенное новыми идеями, сочинение Даламбера не доводило исследования до общих уравнений движения жидкости. Более того, написанное в свойственном Даламберу нечетком и непоследовательном стиле, сочинение это затруднительно для чтения и понимания. Тщательно изучавший его Трусделл писал: «Ясность и прямота, которых мы ожидали на основании введения к сочинению, нигде не обнаруживаются, и я признаюсь, что мне стоило громадного труда проследить, насколько это удалось, за действительным содержанием работы, причем облегчению этого труда не послужили многочисленные опечатки в основных результатах» [6, с. LI]. Подчеркнутые Трусделлом недостатки работы Даламбера не лишили ее, конечно, ценности, особенно для Эйлера, который имел возможность ознакомиться с ней в Берлине еще в 1750 г.

Именно Эйлеру удалось построить, с присущей ему ясностью и четкостью, всю систему уравнений континуального движения идеальной жидкости. При этом он опирался на свой упомянутый выше «новый принцип механики». Первые результаты Эйлера по общей теории движения жидкости относятся, по-видимому, к 1752 г. Два его основных фундаментальных сочинения по гидростатике и гидродинамике, относящиеся к 1753–1755 гг., опубликованы в 1757 г. в «Мемуарах» Берлинской академии.

В первом из этих сочинений (E255; 1757) Эйлер обобщил результаты Клеро и придал изложению гидро- и аэростатики ту форму, которая сохранилась, в основном, и до наших дней. Он вводит понятие давления p, измеряемого высотой столба однородной жидкости, указывает на зависимость давления, по крайней мере, от плотности и температуры и дает затем вывод общего уравнения равновесия жидкостей и газов:

$$dp = q\,(P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

Эйлер понимает в приведенном уравнении под p высоту столба однородной жидкости, т. е. отношение давления к выбранной им постоянной величине, а под q — соответствующую безразмерную плотность; компоненты массовых сил отнесены здесь к ускорению силы тяжести. Использованная здесь система единиц несколько отличается от той, которая применялась Эйлером при первоначальном изложении им «нового принципа механики».

Затем Эйлер вводит понятие потенциала сил s и, переписав общее уравнение равновесия в виде $dp = qds$, указывает на постоянство давления, плотности и температуры на поверхностях уровня потенциала s. Потом он выводит общие зависимости применительно к случаю идеального газа, рассматривает действующие на погруженное тело силы и переходит к подробному рассмотрению различных случаев равновесия жидкостей и газов. Здесь он получает, в частности, известную барометрическую формулу для изотермической атмосферы, а также высказывает предложение, что при постоянном объеме температуру целесообразно определять пропорциональной давлению газа.

Второе свое сочинение — «Общие законы движения жидкостей» (E226; 1757)[6] — Эйлер начинает с общей постановки задач теории движения идеальной жидкости. Затем из обычного для нашего времени рассмотрения элементарного жидкого параллелепипеда выводятся общие уравнения гидродинамики и уравнение неразрывности для сжимаемых жидкостей:

$$P - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$Q - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$R - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial qu}{\partial x} + \frac{\partial qv}{\partial y} + \frac{\partial qw}{\partial z} = 0.$$

Здесь p — давление, q — плотность, P, Q и R — массовые силы. В оригинальной записи Эйлера эти уравнения отличаются только обозначением частных производных. Вместо введенного позже Лежандром и Якоби и принятого сейчас обозначения частных производных через круглое «∂» Эйлер использовал прямое «d» и, для отличия от полных производных, частные производные он записывал в круглых скобках. Например, частная производная $\partial p/\partial x$ в записи Эйлера выглядела как (dp/dx).

Эйлер добавляет тут же, что к этим четырем уравнениям следует добавить пятое, которое дает связь между давлением, плотностью и дополнительной физической величиной, влияющей на давление, под которой подразумевается, вообще говоря, температура. Полученные в результате пять уравнений, говорит Эйлер, «заключают в себе всю теорию движения жидкости».

Вслед за приведенным выводом основных уравнений гидродинамики Эйлер вводит потенциалы сил S и скорости W и получает формулу

$$dp = q(dS - d\Pi - udu - vdv - wdw), \text{ где } \Pi = \frac{\partial W}{\partial t},$$

и соответствующие интегралы для случая несжимаемой жидкости, а также вообще для баротропных процессов — интегралы, носящие сегодня обычно название интегралов Лагранжа–Коши. Эйлер специально оговаривает здесь существование непотенциальных течений жидкости, приводя в качестве примера один случай вихревого вращения несжимаемой жидкости при отсутствии массовых сил. Заканчивается сочинение исследованием отдельных частных случаев и замечанием, что полученные уравнения переводят задачи движения жидкости из области механики в область математического анализа. При чтении этого сочинения особенно поражают (свойственные и большинству других работ Эйлера) ясность и простота изложения мыслей. Трудно, порой, поверить, что его отделяет от нас уже два с половиной века[7].

Вслед за первыми тремя работами Эйлера по механике жидкости и газа последовали многие другие его сочинения, посвященные гидродинамике и теории распространения звука. Завершением и обобщением их явилась большая работа (516 с.), относящаяся уже к концу 60-х годов и опубликованная в четырех частях в 1769–1772 гг. в «Новых комментариях» Петербургской Академии наук. Первая ее часть включает рассмотрение общих свойств жидкостей и газов, вывод общих уравнений равновесия и исследование частных случаев равновесия в поле силы тяжести и центральных сил. Во второй части выведена система общих уравнений гидродинамики идеальной жидкости и рассмотрены подробнее случаи движения несжимаемых жидкостей, в том числе потенциального течения. Последняя глава посвящена определению движения жидкости по заданному начальному состоянию; здесь, в частности, выведены общие уравнения гидродинамики в так называемых переменных Лагранжа — материальных переменных. Отметим, что эти переменные были указаны Лагранжу Эйлером в его письме от 1 января 1760 г., опубликованном Лагранжем в 1762 г. вместе со своими собственными связанными с этим исследованиями. В третьей части работы Эйлер рассматривает течение в трубах постоянного и переменного сечения, расчет подъема воды при помощи насосов и течения под действием разности температур. Последняя часть является обобщением многочисленных предыдущих исследований Эйлера по акустике и теории духовых музыкальных инструментов[8].

Таким образом, Эйлер заложил основы всей гидродинамики идеальной жидкости, за исключением сверхзвуковой аэродинамики, зародившейся на столетие позже и развившейся уже в XX веке. Не обладая общим понятием напряжения, введенным Коши в 1823 г., Эйлер не смог, конечно, перейти к изучению более сложных моделей механики сплошной среды — вязкой жидкости и упругого тела. Однако многое для дальнейшего развития механики сплошной среды было Эйлером подготовлено.

5. Осветив несколько подробнее две блестящие страницы в творчестве Эйлера — создание им теории движения твердого тела и гидродинамики идеальной жидкости, остановимся теперь коротко на его работах по механике гибких и упругих тел. Задачами механики упругих тел (стержней) Эйлер заинтересовался еще в ранней молодости. Любопытно, что в одной маленькой заметке, написанной Эйлером еще в Базеле, но опубликованной лишь посмертно (E831; 1862), Трусделл обнаружил первый вывод закона изгиба стержней Якоба Бернулли из закона Гука для растяжения волокон — результат, не замеченный самим Эйлером и переоткрытый им затем заново значительно позже. Не останавливаясь на важных работах Эйлера (и Даниила Бернулли) о поперечных колебаниях стержней, перейдем к знаменитым исследованиям Эйлера о равновесных формах упругих стержней и их продольном изгибе. Эти исследования были инициированы открытием свойства экстремальности упругой энергии изогнутых стержней, обнаруженного Даниилом Бернулли (1742). Относящиеся сюда классические результаты Эйлера были опубликованы им в 1744 г. в виде специального приложения «Об упругих кривых» к его трактату по вариационному исчислению (E65; 1744). Здесь были проанализированы девять возможных типов равновесных форм (первоначально прямолинейного) стержня прямоугольного сечения, изогнутого под действием приложенной к его концам силы и момента. Здесь же содержится, по существу, и общая формула для критической силы при продольном изгибе стержня. Сам Эйлер, впрочем, применил эту формулу только для случая стержня с шарнирно опертыми концами. В дальнейшем Эйлер неоднократно возвращался к вопросу о продольном изгибе колонн, и последние его исследования в этой области, относящиеся к концу 70-х годов, посвящены продольному изгибу колонн под действием их собственного веса. В ряде работ по этой проблеме (E508–510; 1780) Эйлер последовательно преодолевал встречавшиеся трудности, получив, в конце концов, правильное решение.

Активное участие принял Эйлер в дискуссии о колебаниях струны. По существу, задача о малых поперечных колебаниях струны (и о распространении звука) была первой задачей динамики систем с бесконечным числом степеней свободы. Примечательно, что эта задача начала изучаться задолго до того, как была разработана динамика систем с конечным числом степеней свободы. Классическое волновое уравнение колебаний струны получил в 1746 г. Даламбер (опубликовано в 1749 г.). Тогда же он нашел и его решение, содержащее две произвольные функции от аргументов $(ct+x)$ и $(ct-x)$. Однако Даламбер произвольно ограничил класс функций, входящих в решение волнового уравнения, некоторыми условиями «непрерывности» и «гладкости». Эйлер занялся исследованием волнового уравнения сразу же вслед за Даламбером и подчеркнул, что общее решение задачи о струне должно включать функции значительно более широкого класса — произвольные кусочно-гладкие функции. Третий активный участник дискуссии о колебаниях струны — Даниил Бернулли включился в нее также почти с самого начала. Бернулли возражал против абстрактных рассуждений Даламбера и Эйлера о произвольных функциях и считал, что колебания струны проще и естественнее представлять как суперпозицию простых гармонических колебаний. Дискуссия о характере решений волнового уравнения продолжалась много лет (позже в нее включился и Лагранж) и оказала большое влияние на последующее развитие методов математической физики и, в известной мере, теории функций действительного переменного.

Укажем еще на относящиеся к 70-м годам обобщающие исследования Эйлера по механике гибких и упругих (одномерных) тел. Здесь им были получены общие уравнения равновесия и движения деформируемой линии (и плоскости) без специальных предположений о природе ее материала и о малости деформаций. При этом Эйлер рассматривал действующие в сечениях поперечные силы, предвосхитив представление о касательных напряжениях. Наконец, к этим же годам относится введение Эйлером физической характеристики материала, вполне эквивалентной модулю Юнга, и, тем самым, отделение в задачах теории упругости упругих свойств материала от формы рассматриваемого тела.

6. В приведенном очерке практически вовсе не затронуты сочинения Эйлера по прикладной механике. В историческом аспекте они, конечно, уступают его исследованиям в области математики и рациональной механики, но и в развитии прикладной механики Эйлер оставил глубокий след. Эйлер занимался вопросами сухого трения (в частности, его имя носит формула для расчета трения каната, обернутого вокруг круглого вала). Ему принадлежат интересные работы по общей теории машин, а также по расчету различных конкретных машин, механизмов и приборов (например, весов). Заслуживает специального упоминания исследование Эйлером формы зубчатых колес. Цикл работ посвящен Эйлером гидравлическим двигателям и, в частности, теории колеса Сегнера — прообраза реактивной гидравлической турбины.

Глубокие исследования были проведены Эйлером по теории корабля. После выпуска упомянутой выше двухтомной «Корабельной науки» (E110–111; 1749) он изучал различные системы движителей, в том числе гидрореактивные движители, выведя для последних некоторые сохраняющие значение и до наших дней расчетные формулы. Эйлеру принадлежат также некоторые результаты по строительной механике корабля. Наконец, Эйлер выпустил написанное по-французски практическое руководство по кораблестроению и вождению кораблей (E426; 1773). Замечательно, что это руководство было переиздано затем в Париже, использовалось там в качестве учебного пособия, а также было переведено на английский, итальянский и русский языки.

Возвращаясь к программе построения механики, предложенной Эйлером в молодости, надо отметить, что он построил на протяжении своей жизни три из намеченных им шести общих разделов механики: сюда относятся аналитически изложенная механика точки (n°1), механика твердого тела (n°2) и гидродинамика (n°6). В учение о гибких телах (n°3) и в механику системы (n°5) Эйлер внес фундаментальный вклад, наряду с другими учеными. Что же касается теории упругости (n°4), которой он посвятил ряд важных исследований, то она была создана лишь в XIX веке. Отвечая в целом на поставленный вопрос, можно сказать, что Эйлер блестяще справился с той грандиозной программой, которую он поставил пред собой в первом томе «Механики» (1736), не сознавая еще ее невероятной трудности. Эйлеру мы в большей степени, чем кому-либо другому, обязаны уяснением основ механики.

Примечания:

[1] Многое для понимания величия вклада Эйлера в становление рациональной механики сделал в середине XX века выдающийся американский историк механики Клиффорд Трусделл. Ему принадлежит ряд фундаментальных исследований, частично отраженных

в его монографии [3], и обширнейшие (по несколько сотен страниц) предисловия к томам «Полного собрания трудов» («Opera omnia») Эйлера, посвященным гидродинамике и механике гибких и деформируемых тел (т. 11, ч. 2; 12 и 13 второй серии).

[2] Объем указан в пересчете на страницы «Opera omnia» Эйлера.

[3] Здесь и далее сочинения Эйлера снабжены по международной традиции номерами (с буквой E перед ними) согласно известному указателю Энестрёма [7]. Этот малодоступный указатель воспроизведен, с сокращенными описаниями, в посвященном материалам Эйлера выпуске «Трудов» Архива АН СССР [4, т. 1, с. 352–387].

[4] Характерной для Эйлера была острота ума, которая позволяла ему на основании малейшего намека возводить стройную и совершенную теорию. Это позволяло ему достигать блестящих успехов, в том числе, используя нечетко сформулированные мысли современников. С другой стороны, в молодости Эйлера отличала безграничная вера в бесспорность аналитических выкладок, приводившая его изредка к неверным, парадоксальным заключениям. Об этих ошибках молодости он сам предпочитал позже не вспоминать. Бесспорно, Эйлер всегда оставался глубоким аналитиком, не склонным к эксперименту. В физической интуиции он уступал некоторым своим современникам и, прежде всего, Даниилу Бернулли.

[5] М. Ф. Субботину [2] принадлежит, пожалуй, наиболее полный разбор исследований Эйлера по небесной механике.

[6] Недавно опубликован русский перевод этой классической работы Эйлера [8].

[7] В 2007 году во Франции была проведена большая международная конференция, посвященная 250-летию уравнений гидродинамики. Труды ее опубликованы в 2008 г. в специальном выпуске журнала «Physica D».

[8] Любопытно, что ни здесь, ни в мемуарах Эйлера 50-х годов нет анализа так называемого парадокса Даламбера, заключающегося в отсутствии гидродинамического сопротивления тел в потенциальном потоке. По существу же этот парадокс был впервые обнаружен Эйлером еще при комментировании подготовленного им немецкого перевода «Новых основ артиллерии» Бенджамина Робинса (E 77; 1745), на что неоднократно обращали внимание позднейшие исследователи.

Литература:

1. *Эйлер Л.* Основы динамики точки: Первые главы из «Механики» и из «Теории движения твердых тел». М.; Л.: Гостехиздат, 1938.

2. *Субботин М. Ф.* Астрономические работы Л. Эйлера // Леонард Эйлер. М.: АН СССР, 1958. С. 268–376.

3. *Truesdell C.* Essays in the History of Mechanics. Berlin e. a.: Springer-Verlag, 1968.

4. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. 2 т. М.; Л.: АН СССР, 1962–1965 (Труды Архива АН СССР. Вып. 17, 20).

5. *Михайлов Г. К.* Становление гидравлики и гидродинамики в трудах петербургских академиков (XVIII век) // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 6. С. 7–26.

6. *Truesdell C.* Rational Fluid Mechanics, 1687–1765 // LEOO II, 12. P. VII–CXXV.

7. *Eneström G.* Verzeichnis der Schriften L. Eulers // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. Ergänzungsb. 4:1/2. 1910–1913.

8. *Эйлер Л.* Общие законы движения жидкостей // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 6. С. 26–54.

Н. Ф. Морозов, П. Е. Товстик
Санкт-Петербург, Россия

Леонард Эйлер и современная механика

Abstract: The basic contribution of Euler's investigations in the classical mechanics is considered. His famous results form a large step in the evolution of the Newton's mechanics. A great number of laws, theorems and formulas in mechanics bear Euler's name. Some recent investigations based on the Euler's ideas are discussed.

Мы отмечаем 300 лет со дня рождения Леонарда Эйлера (1707–1783) — выдающегося математика, механика и философа. В этом докладе обсуждается огромный вклад, который внес Эйлер в становление и развитие современной механики. Среди примерно 850 его научных работ 58 % относятся к математике, 28 % — к механике и физике, 11 % — к небесной механике и астрономии.

Эйлер с раннего возраста проявил выдающиеся способности к научной деятельности. Под руководством Даниила Бернулли в Базельском университете он изучил основополагающие труды Ньютона и Лейбница по математике и механике.

В первые годы своей научной деятельности Эйлер основное внимание уделял механике. В 1736 году в Петербургской Академии наук им был опубликован фундаментальный труд под названием «Механика, т. е. наука о движении, изложенная аналитическим методом». Вторая часть этого труда «Теория движения твердых тел, основанная на первоначальных принципах нашего познания и примененная ко всем движениям, которые могут иметь этого рода тела» вышла в 1765 году. Еще в возрасте восемнадцати–девятнадцати лет в своих записках Эйлер составил программу исследований по механике. Эта программа приведена также в «Механике» и содержит следующие разделы, названия которых мы приводим в сокращении.

1. Динамика точки.
2. Динамика твердого тела.
3. Механика гибких тел.
4. Механика тел, допускающих растяжение и сжатие.
5. Динамика систем твердых тел.
6. Динамика жидких тел.

Кроме работ, относящихся к перечисленным разделам, Эйлер провел в области механики основополагающие исследования по внешней и внутренней баллистике, корабельному делу, небесной механике и теории движения Луны, теории звука и акустике, а также другие исследования.

Обсудим кратко достижения Эйлера.

При исследовании движения точки Эйлер исходил из второго закона Ньютона, одна из форм записи которого имела вид, близкий к современному:

$$\frac{2ddx}{dt^2}=\frac{X}{M},\quad \frac{2ddy}{dt^2}=\frac{Y}{M},\quad \frac{2ddz}{dt^2}=\frac{Z}{M}, \tag{1}$$

причем множитель 2 связан с выбором системы единиц. Основное достижение Эйлера, по сравнению с Ньютоном, заключается в том, что первый для интегрирования системы (1) систематически применял методы математического анализа. Ньютон же пользовался геометрическими методами и построениями, которые не обладали достаточной общностью и существенно зависели от рассматриваемой задачи. Эйлер решил много частных задач, исследовав прямолинейное и криволинейное движение точки, движение точки по кривой и по поверхности.

Эйлер заложил основы вариационного исчисления и использовал уравнение, носящее его имя, при решении изопериметрических задач и задачи о брахистохроне. В 1746 году Мопертюи сформулировал принцип наименьшего действия, заключающийся в том, что для действительного движения произведение mvs минимально. Эйлер записал этот принцип в виде

$$M\int v\,ds = \min$$

и доказал его для переменного движения точки.

Переходя к работам Эйлера по динамике твердого тела, следует отметить, что в своей книге «Динамика» в 1736 году он пишет о «недостаточности принципов» для решения задачи. На выработку этих принципов и на вывод уравнений динамики твердого тела потребовалось несколько десятилетий. Центральным моментом при этом была идея о разбиении тела на элементарные объемы и последующем суммировании сил инерции.

В процессе анализа Эйлером получены выражения для проекций скоростей точек вращающегося тела

$$\frac{dx}{dt} = pz - ry, \quad \frac{dy}{dt} = rx - pz, \quad \frac{dz}{dt} = py - qx.$$

В современных векторных обозначениях — это формула Эйлера $\nu = \omega \times r$. При выводе уравнений движения тела оказалось, что в неподвижной декартовой системе координат эти уравнения очень громоздки, и Эйлер предложил перейти к подвижной системе координат, связанной с телом. При этом были введены углы Эйлера, которые до сих пор являются основными при описании поворота тела. Были получены выражения для компонентов тензора поворота через углы Эйлера. Была разработана теория моментов инерции, найдены главные оси инерции тела и получены уравнения вращательного движения тела в главных осях инерции, которые в современных обозначениях имеют вид:

$$P = A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr, \quad Q = B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp, \quad R = A\frac{dr}{dt} + (B-A)pq. \qquad (2)$$

Эйлером выполнено интегрирование этих уравнений в случае свободного движения, когда внешние моменты P, Q, R равны нулю (случай Эйлера вращения твердого тела вокруг неподвижной точки). Систему (2) Эйлер использовал при исследовании вращательного движения Земли и Луны, в задачах внешней баллистики.

Из работ по небесной механике можно выделить огромный том в 790 страниц «Новая теория движения Луны...», переведенный с латыни А. Н. Крыловым. В 1765 г. Эйлер был награжден английским парламентом «за теоремы, при помощи которых недавно умерший профессор Мейер из Геттингена построил свои

Лунные таблицы, позволившие достичь большого прогресса в деле нахождения долгот на море» (по этим таблицам долготу можно определять с точностью до одного градуса). На имя Мейера было выписано 5000 фунтов стерлингов, а Эйлеру — 300.

Но вернемся к законам механики.

Принципиальным является вопрос о полноте законов Ньютона для описания движений в классической механике. Не нужно ли второй закон Ньютона дополнить аналогичным и не зависящим от него законом

$$\frac{dl}{dt} = L, \tag{3}$$

описывающим вращательное движение, где l — момент количества движения, а L — главный момент внешних сил? Современная механика не дает однозначного ответа на этот вопрос. Дело в том, что уравнения (2) были выведены из второго закона Ньютона, поэтому в данной задаче соотношение (3) является его следствием. Однако существуют области механики, в которых мысленное разбиение тела на элементарные объемы с целью вывода уравнений (2) или (3) является недопустимым. Такие задачи, строго говоря, выходят за рамки классической механики, однако допускают исследование ее методами. Это задачи микро- и нано-механики, задачи моментной теории упругости, в которых необходим учет моментного взаимодействия частиц, задачи с электромагнитными и тепловыми эффектами.

Трусделл считал необходимым дополнить законы Ньютона соотношением (3) и предложил [1] называть законы движения центра масс и вращения вокруг него эйлеровыми законами механики. Этой же точки зрения придерживался и недавно скончавшийся П. А. Жилин. Он написал учебник по теоретической механике, в котором последовательно проводится эта точка зрения [2]. Основным объектом его механики является тело-точка, имеющая бесконечно малые размеры, однако наделенная массой и моментом инерции. Ее положение определяется декартовыми координатами и тензором поворота, а движение — вторым законом Ньютона и не зависящим от него законом (3).

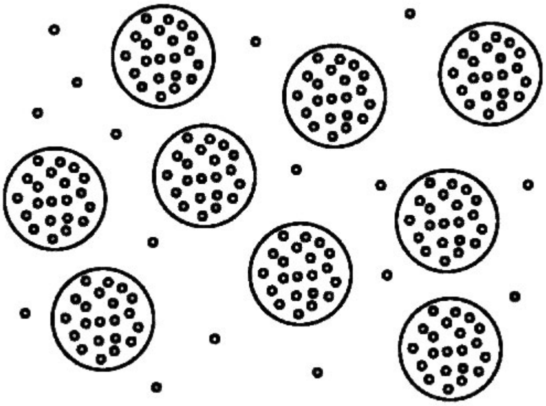


Рис. 1. Элементарный объем неклассической среды

Классическое понятие тела–точки может быть расширено, если расширить возможные значения тензоров инерции тела. Таким образом, классические законы механики смогут описывать поведение неклассических тел, например, движение частицы по инерции по спирали.

Это точка зрения оказалась эффективной при выводе новых моделей механики сплошной среды. Е. А. Иванова, ученица П. А. Жилина, рассматривает [3] среду, состоящую из частиц, состоящих, в свою очередь, из неклассических тел–точек и свободных неклассических тел–точек, которые являются внешним фактором по отношению к рассматриваемой среде (см. рис. 1). Вводится силовое и моментное взаимодействие между точками среды. В результате осреднения по объему получена достаточно общая математическая модель среды, которая в частных случаях сводится к уравнению состояния идеального газа, уравнению теплопроводности, закону Фурье, а также к уравнениям связанной задачи термовязкоупругости.

Работы Эйлера по механике упругих тел ограничены одномерными задачами и посвящены исследованиям изгиба, устойчивости и колебаний стержней (эластик) [4]. Исследования Эйлера по упругим эластикам основаны на результате Я. Бернулли о пропорциональности кривизны упругой линии изгибающему моменту. Задача об изгибе под действием сосредоточенных и распределенных сил сводится к уравнению

$$P_x y - P_y x + \int_0^y \left(\int_0^s F_x ds \right) dy - \int_0^x \left(\int_0^s F_y ds \right) dx = -\frac{Ek^2}{R},$$

в котором R — радиус кривизны упругой линии, k — толщина (Эйлер ошибочно считал, что изгибная жесткость пропорциональна квадрату толщины). По предложению Д. Бернулли Эйлер для анализа форм эластик использует разработанный им аппарат вариационного исчисления, сводя задачу определения формы кривой к задаче минимизации функционала

$$\int_A^B \frac{ds}{R^2},$$

пропорционального потенциальной энергии деформации.

Эйлер дает классификацию форм эластик (см. рис. 2), получающихся под действием сил, приложенных к концам стержня, и указывает на существование девяти различных форм. Заметим, что только две последние устойчивы. (Необходимым условием устойчивости стержня под действием сил и моментов, приложенных к его концам, является отсутствие точек перегиба.)

Далее, Эйлер занимается исследованием устойчивости стержней и колонн при продольном сжатии в линейном и нелинейном приближении. Для шарнирно опертого стержня он получает нелинейную зависимость между длиной стержня l, силой P и максимальным прогибом f (в современных обозначениях):

$$l = \pi \sqrt{\frac{EJ}{P}} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{f^2 P}{4EJ} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \left(\frac{f^2 P}{4EJ} \right)^2 + \cdots \right),$$

из которой при f=0 получаем критическую нагрузку в линейном приближении. В отличие, например, от оболочек стержень может выдерживать нагрузку, боль-

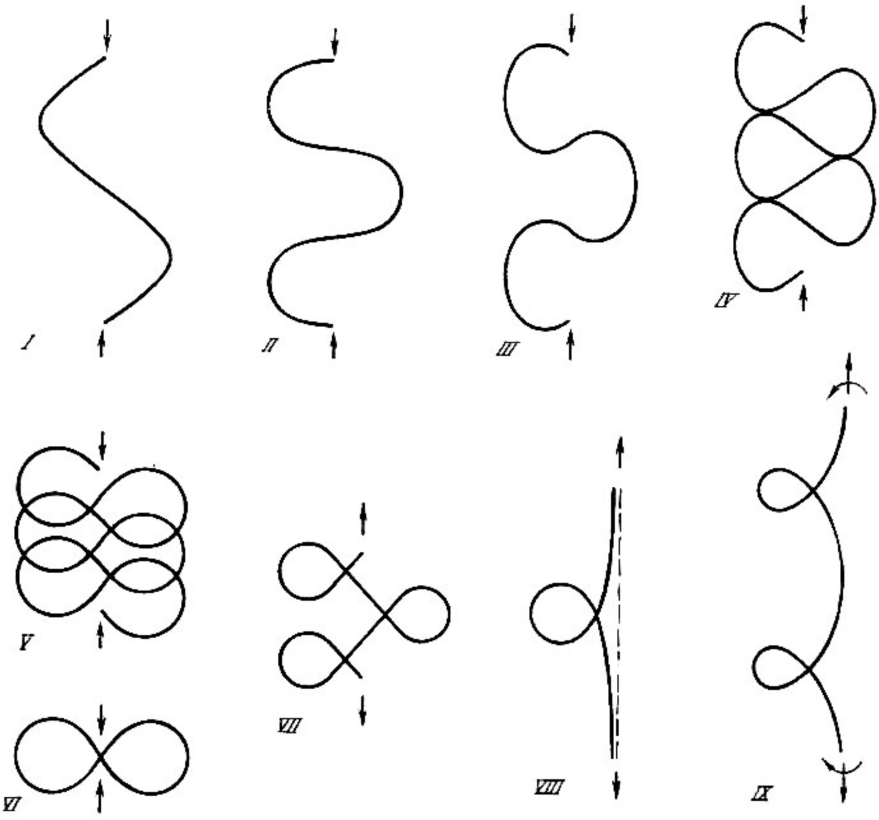


Рис. 2. Эластики Эйлера

шую критической, однако при этом он сильно изгибается, что следует из форм эластик.

Недавно [5] авторы доклада выполнили исследование, весьма близкое к работам Эйлера по деформации и устойчивости стержней.

Речь идет об исследовании форм равновесия стержня, лежащего на гладкой наклонной стенке и находящегося под действием сил тяжести и осевого сжатия (см. рис. 3). В этой задаче при достаточно малой сжимающей силе возможно только тривиальное положение равновесия, которое устойчиво в малом и при больших значениях силы P. Однако при больших значениях силы появляются и нетривиальные положения равновесия, показанные на рис. 4. В левой части рисунка угол наклона равен нулю, а в правой части — 60 градусов. Кривыми на этом рисунке показаны формы упругой линии при последовательном увеличении осевой силы. Для исследования устойчивости использовались два метода, восходящие к Эйлеру. Согласно первому из них, в положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий минимум (ее вторая вариация положительно определенна). Второй метод связан с рассмотрением малых колебаний около положения равновесия. Естественно, в силу консервативности задачи оба метода дают одинаковые результаты. Концы устойчивых кривых отмечены на рисунках жирной линией.

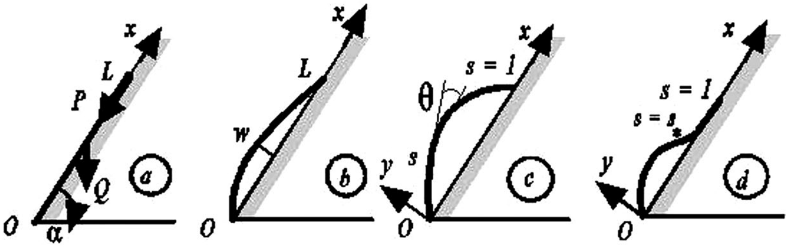


Рис. 3. Стержень, опирающийся на стенку

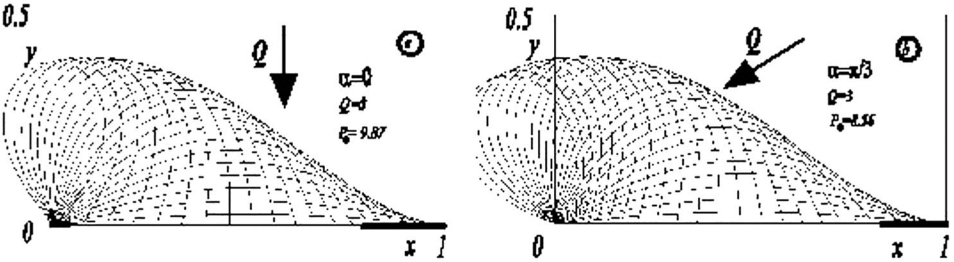


Рис. 4. Формы упругой линии стержня

Свой метод разложения среды на элементарные объемы Эйлер использовал и для вывода уравнений движения идеальной жидкости. В своем сочинении «Общие принципы движения жидкостей» (1755) он приводит уравнения движения и уравнение неразрывности в форме, сохранившейся неизменной до настоящего времени и носящей его имя:

$$P-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$Q-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$R-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial(qu)}{\partial x}+\frac{\partial(qv)}{\partial y}+\frac{\partial(qv)}{\partial z}=0$$

Для замыкания системы к этим уравнениям Эйлер добавляет уравнение состояния, связывающее давление, плотность и температуру. Кроме того, Эйлер вывел уравнения движения жидкостей в переменных Лагранжа. Эйлер получил барометрическую формулу для изотермической атмосферы, исследовал течение воды в трубах постоянного и переменного сечения, проводил исследования по акустике и теории духовых музыкальных инструментов.

Сфера деятельности Эйлера в области механики многогранна и обширна, поэтому естественно, что многие его результаты в этой области остались не упомянутыми в данном докладе.

Эйлер был выдающимся популяризатором науки. Его труды легко читаются и в настоящее время. Специально для малоподготовленных читателей Эйлер в 1760–1762-х годах написал трехтомный труд «Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях». Российская Академия наук в 2002 году переиздала эту книгу. Не со всеми физическими и философскими утверждениями автора следует соглашаться, однако чтение этого труда весьма полезно даже для современного читателя. Приведем лишь один любопытный пример. По аналогии со звуковыми волнами Эйлер пытается объяснить распространение света и цвет продольными колебаниями эфира, хотя в то время не было еще понятия об электромагнитных волнах.

В заключение отметим, что Эйлер внес неоценимый вклад в механику. Его результаты стали классическими и вошли во все учебные курсы по механике. Начатые им исследования продолжаются и в настоящее время, как мы пытались показать в настоящем сообщении.

Литература:

1. *Truesdell C.* Essays in the History of Mechanics. N. Y.: Springer, 1968.

2. *Жилин П. А.* Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2003.

3. *Ivanova E. A.* Model of nonclassical medium and termodynamic analogies // Proc. XXXIV Summer school “Advanced Problems in Mechanics”. St. Petersburg, 2006. P. 221–254.

4. *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых, обладающих свойством максимума либо минимума. М.; Л.: ГТТИ, 1934.

5. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е.* Устойчивость сжатого стержня при наличии ограничения на перемещение // ДАН РФ. 2007. Т. 412. № 2. С. 112–116.

Г. Т. Алдошин
Санкт-Петербург, Россия

Леонард Эйлер и аэрогидроупругость

Abstract: The history of development of hydroelasticity is considered. Its origin is connected to I. Newton, who has specified on interrelation of deformation of an elastic wall of a vessel and movements of liquid contained in it, and L. Euler, suggested the first mathematical statement of a problem of hydroelasticity. The major direction of the further development were the formulas established by D. Korteweg for speed of a sound in an elastic pipe and development N. Joukovsky theories of water-hammer in pipes. Since 60 years of the last century began intensive introduction of ideas of hydroelasticity in researches of cardiovascular system.

Задача о взаимодействии жидкости с плавающим в ней твердым телом является одной из наиболее старых и, в то же время, по-прежнему актуальных проблем механики. Начиная с античных времен и вплоть до конца XVII века был получен ряд важных результатов — закон Архимеда (287–212 до н. э.) о весе тела, погруженного в жидкость, методика расчета давления жидкости на стенки сосуда С. Стевина (1548–1620), эмпирические формулы Б. Робинса (1707–1751) для сопротивления воздуха движению артиллерийского снаряда, проект гидрореактивной водяной турбины И. Сегнера (1704–1777) и т. д.

Но все эти результаты относились к идеализированным объектам — абсолютно твердым телам и недеформируемым поверхностям сосудов, содержащих жидкость. Если тела и элементы конструкции являются упругими, то под действием давления окружающей среды они деформируются, что приводит к изменению внешних сил, приложенных к конструкции. Поэтому проблема определения напряженно-деформированного состояния конструкции и течения жидкости должны решаться совместно, как сопряженные. Круг таких задач определяет предмет современной теории аэрогидроупругости. Это направление привлекает в настоящее время внимание физиков, механиков, математиков своей актуальностью, сложностью и многообразием.

Первые соображения по этому вопросу содержатся в знаменитых «Началах» И. Ньютона (1643–1727) [1]. В пятом отделе «О плотности и сжатии жидкостей в гидростатике» Ньютон замечает: «...если эта жидкость заключена в сосуд не твердый и не везде испытывает одно и то же давление, то она, по определению, уступает более сильному давлению...» и «...движение частей жидкости друг относительно друга не может быть изменено приложением давления к внешней ее поверхности, если только сама эта поверхность где-либо не изменяется».

В эти же годы Ньютоном и Лейбницем (1646–1716), независимо и почти одновременно, были созданы основы анализа бесконечно-малых (дифференциальное исчисление) и начала интегрального исчисления, что позволило Ньютону, в авторском предисловии к первому изданию «Начал», сказать, что им развита математика, необходимая для физических приложений. Но геометрические методы, которыми пользовался Ньютон, также как и геометрический вариант исчисления бесконечно малых, предложенный им, только у него и у первоклассных ученых мог быть методом — для менее сильных математиков даже разбор готовых решений в «Началах» был нелегким делом. К тому же, «Начала» не содержали еще ряда существенных элементов, необходимых для построения механики твердого тела и сплошной среды, да и сами уравнения сплошной среды разработаны еще не были. Новый фундаментальный вклад в становление и развитие механики и ее основных разделов: механики твердого тела, баллистики, гидромеханики и др. был сделан Л. Эйлером (1707–1783). Первые усилия Эйлер направил на упорядочение динамики точки и переложение ее на язык математического анализа. Это было им выполнено в двухтомной «Механике» (1736).

Великий русский писатель Ф. М. Достоевский, характеризуя литературный процесс своего времени, заметил, что «все мы вышли из “Шинели” Гоголя». Перефразируя это высказывание, можно было бы сказать, что вся механика вышла из «Начал» Ньютона и «Механики» Эйлера. Научное наследие Эйлера, поражает воображение современного читателя не только своим объемом, но и необычайной широтой научных интересов и богатством содержащихся в нем идей. Особняком среди его сочинений стоит работа: «Principia pro motu sanguines per arterias determinando» («Основы движения крови по артериям») [2], в которой была представлена задача о движении жидкости в упругой трубе, и которая явилась первой математической постановкой задачи гидроупругости. Судьба этой работы похожа на некий детективный сюжет и по-своему драматична. Она была опубликована уже посмертно в 1862 году, хотя была написана, вероятно, в 1742 г. В предисловии к тринадцатому тому второй серии сочинений Эйлера «Opera Omnia» (1955, p. LXXVII–LXXVIII) известный историк механики Трусделл упоминает о письме Эйлера к Гольдбаху в 1742 г., в котором Эйлер сообщал о посылке фрагмента своей статьи «о течении жидкости в упругой трубе» в Дижон на конкурс, объявленный Академией наук по данной тематике с денежной премией в 30 луидоров. Не получивший никакого ответа из Академии, Эйлер об этом очень сожалел, не только потому, что работа не получила поддержки, но и потому, что рукопись, как он думал, была утеряна, а копии он себе не оставил. Впоследствии оказалось, что работа не только не пропала, но фактически была одной из трех, среди которых в 1743 г. был разделен приз ([3], [4]). Неизвестно, получил ли Эйлер в конце конце свою часть премии. По крайней мере, в перечне премий, которые Эйлер получил за решение задач, составленном Ю. Х. Копелевич [5], эта премия, как и сама работа, не упоминаются.

Публикация 1862 г. основана, по-видимому, на одном из вариантов первоначальной рукописи, но при подготовке посмертного собрания сочинений Эйлера издатели имели в своем распоряжении только неполную рукопись, в которой отсутствовали параграфы с 1-го по 14-й. Позже они были найдены в Архиве Академии наук СССР в Ленинграде, и полный текст работы впервые был опубликован в «Opera Omnia» в 1979 г. (LEOO II, 16).

Можно предположить, что интерес к исследованию проблем гемодинамики (движения крови по артериям) появился у Эйлера в результате его тесного общения с братьями Бернулли. Один из них, Даниил Бернулли (1700–1782), в 1725–1727 гг. был профессором физиологии по кафедре анатомии и физиологии Петербургской академии и занимался вопросами гидростатики, механики движения жидкости в каналах и др. С именами Иоганна и Даниила Бернулли и Л. Эйлера связаны наиболее значительные исследования по гидравлике в XVIII в. В работах, относящихся к 1727–1740 гг., они рассматривали, в основном, одномерные течения. В 1738 г. Д. Бернулли завершил фундаментальный труд «Гидродинамика или записки о силах и движениях жидкости» [6], большую часть которого составляли точные математические расчеты. Чрезвычайно существенным вкладом Д. Бернулли явилось введение им гипотезы сечений и формулировка принципа неразрывности. Примерно в эти же годы (1733) было опубликовано сочинение «Haemostatiks» английского физиолога Хейлса, в котором он привел результаты первого в истории прямого измерения кровяного давления у животных и оценки скорости течения крови в различных артериях; им было введено также понятие «силы крови» — аналог давления в движущейся жидкости. Таким образом, идея математического описания процессов, протекающих в живом организме, на основе общих законов механики витала в воздухе и привлекала внимание механиков того времени. Результаты своих исследований о движении жидкости в трубе с эластичными стенками Эйлер доложил на заседании Петербургской Академии наук в 1775 г. В выбранной модели Эйлер использует впервые установленную им аналитическую запись уравнения неразрывности в одномерной (гидравлической) постановке:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+v\frac{\partial S}{\partial x}+S\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

и уравнение движения:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

которое Эйлер называет уравнением ускорения, где x — продольная координата по оси трубы, t — время. Для неизвестных S — площадь поперечного сечения трубы, v — скорость жидкости, p — давление составлены только два уравнения. Жидкость считается несжимаемой, и потому плотность жидкости $\rho=const$. Течение крови в артерии вызывается периодическими сокращениями сердца, которое рассматривается как гидравлический насос. Для замыкания системы уравнений необходимо еще задать уравнение, связывающее изменение площади с изменением давления. В истории теории сопротивления материалов и теории упругости того времени видное место занимают работы Д. Бернулли и Эйлера о поперечных колебаниях упругих стержней.

В 1764 г. Эйлер рассмотрел колебания гибкой мебраны, которую он рассматривал, в сущности, как пластинку. Уравнения колебательного движения тонкой цилиндрической трубы или оболочки в ту пору установлены еще не были. Интересно отметить, что в мемуаре «О звучании колоколов» (1766) для вывода уравнений Эйлер представляет колокол разделенным горизонтальными сечениями на кольца, а каждое кольцо делится вертикальными сечениями на пластинки. Кольца и пластинки рассматриваются как двумерные тела, которые колеблются независимо друг от друга. Поэтому в качестве замыкающего уравнения к уравнениям гидродинамики Эйлер добавляет конечное соотношение между S и p, что означает пренебрежение инерцией стенок артерии; далее он предполагает существование сечения Σ, соответствующего бесконечному давлению:

$$S = \frac{\Sigma p}{c+p}, \text{ или } S = (1 - C\log\frac{\Sigma}{\Sigma - S}).$$

Приведенные уравнения не определяют однозначной зависимости, а допускают большую свободу выбора, и эта неопределенность не позволила Эйлеру свести исходную систему уравнений гидродинамики к одному уравнению для скорости или давления и затем его интегрировать. Заканчивает Эйлер свою работу словами: «...вынужден закончить работу, так как ее решение превосходит человеческие силы. Если бы Бог хотел, чтобы мы нашли течение крови по артериям, он не придумал бы такие сложные уравнения». С позиций сегодняшнего дня, можно заметить, что от решения его отделял всего один шаг. В 1750 г. Ж. Даламбер (1717–1783) вывел первое уравнение математической физики в частных производных — уравнение поперечных колебаний однородной струны в виде:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

где y — прогиб, a — скорость распространения волны.

Даламбер нашел решение этого уравнения в виде суммы двух произвольных функций

$$y = f(x - at) + g(x + at).$$

В 1751 г. Эйлер дал новый вывод уравнения Даламбера и графический способ построения решения. И если бы ему удалось в то время найти зависимость $S(p)$, то задача была бы сведена к уравнению колебаний струны.

В середине XVIII в. Эйлер вывел общие уравнения движения идеальной жидкости. Эйлеру и Лагранжу принадлежат и первые исследования потенциального движения идеальной жидкости. Вывод общих уравнений математической теории упругости был дан в трудах Навье, Коши, Пуассона в 20-е XIX в.

В дальнейшем Эйлером было опубликовано большое число работ по гидравлике и гидромеханике, но к задаче гидроупругости он больше не возвращался. Нет никаких упоминаний об этом и в его записных книжках [7]. Но хотя задача и не получила законченного решения, сама постановка Эйлером задачи о нестационарном течении жидкости в эластичном канале явилась важной вехой в зарождении механики кровообращения (гемодинамики). Впоследствии подобные задачи гемодинамики артерий рассматривались рядом авторов.

После Эйлера следующая попытка применения уравнений гидравлики к течению в кровеносных сосудах была предпринята Т. Юнгом [8], который для бесконечно малых движений установил аналогию между волнами в сжимаемой жидкости в твердой трубе и волнами в несжимаемой жидкости в упругой трубе. Скорость распространения волны он определяет по формуле Ньютона:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E — жесткость.

Это утверждение больше соответствует физике процесса, чем предложенная ранее модель Эйлера.

Основные уравнения Эйлера в линеаризованной форме выведены заново Е. Вебером [9] в 1850 г., а эксперименты по исследованию течения воды в резиновом шланге подтвердили результаты Юнга. С этого времени начинается устойчивое развитие теории.

Во второй половине XIX в. была выполнена серия работ по определению скорости звука в жидких и газообразных средах, заполняющих упругие трубы. Рядом физиологов, изучавших законы кровообращения, определялась скорость пульсовой волны в артерии. Однако результаты этих исследований были противоречивы. Основная особенность подобных задач заключается в том, что, в отличие от неограниченной жидкости, в жидкости, заключенной в упругой трубе, распространяются волны, скорость которых определяется как свойствами самой жидкости, так и податливостью стенок трубы. Поэтому требовалась более строгая теория вопроса. Г. Ресаль [10], рассматривая по существу ту же задачу, что и Эйлер (движение несжимаемой жидкости в каучуковой трубе), впервые определил скорость волны, учтя упругость трубы:

$$c = \sqrt{\frac{Eh}{2R\rho}},$$

где h — толщина стенок, R — радиус трубы.

Одновременный учет сжимаемости жидкости и податливости стенок трубы осуществил Д. Кортевег [11], предложивший формулу для скорости звука в упругой трубе, заполненной жидкостью:

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + 2\frac{KR}{Eh}}},$$

где c_0— скорость звука в жидкости, K — модуль упругости жидкости.

Таким образом, спустя более чем 100 лет после формулировки Эйлером своих уравнений был сделан решительный шаг, позволивший замкнуть систему уравнений гидравлики и упругости. Правда, Кортевег рассматривал трубу как систему несвязанных друг с другом упругих колец, пренебрегая изгибными напряжениями и силами инерции. Так как кольца не взаимодействуют, то упругие волны в осевом направлении вдоль цилиндрической поверхности не распространяются. Такое допущение оправдано для длинных волн, когда кинетической энергией поперечного движения жидкости и стенок трубы можно пренебречь по сравнению с энергией продольного движения жидкости.

Более полный анализ этой задачи для несжимаемой жидкости, но с учетом инерции стенок трубы и трения, был сделан И. С. Громеко в работе «О скорости распространения волнообразного движения жидкости в упругих трубках» [12], доложенной им на заседании Физико-математической секции Общества естествоиспытателей при Казанском университете.

В частном случае, с учетом инерции и при пренебрежении трением, Громеко определил две скорости движения волны. Одна из скоростей в предельном случае отсутствия инерции оказалась близкой к скорости, определенной Ресалем, другая скорость обращалась в бесконечность, ее физический смысл остался невыясненным. Скорость волны не зависит от ее длины, а амплитуда при движении не меняется. Решить задачу с учетом трения Громеке не удалось, но качественный анализ показал, что трение приводит к ослаблению амплитуды волны при ее движении и к зависимости скорости волны от ее длины. «Чрезвычайная сложность уравнений не позволила мне найти его решение в сколько-нибудь простой форме и при его помощи исследовать вопрос о влиянии трения на скорость распространения пульса... Надеюсь, что этот интересный вопрос будет решен более искусными математиками», — такими словами заканчивает Громеко свою работу.

Следующий большой шаг в развитии гидроупругости сделал известный гидромеханик Г. Лэмб [13]. Он был, вероятно, первым, кто детально исследовал распространение звуковых волн в упругих трубах. Рассматривая тонкостенную трубу как мембрану и учтя, тем самым, продольные напряжения в стенке, Лэмб установил существование двух конечных фазовых скоростей в длинноволновом приближении. Одна из них близка к скорости, определенной Кортевегом, а другая близка к скорости звука в материале стенки трубы. Изгибные волны, вызываемые напряжениями сдвига, ввиду их малости не рассматривались.

В конце XIX века внимание инженеров-гидравликов привлекла проблема возникновения скачков давления в водопроводных трубах при быстром закрытии задвижек, отключении или включения насоса и т. п., так как это часто сопровождалось авариями на водопроводах. Само явление распространения скачка давления получило в технической литературе название «гидравлический удар» («water hammer»). Первые исследования гидравлического удара были сделаны Мико [14], который обсуждал различные способы снижения силы удара, не связывая саму проблему с предшествующими работами по звуковым волнам. В 1890 г. Чёрч [15] и в 1894 г. Карпентер [16] проводили исследования повышения давления при закрытии крана водопровода. Было обнаружено, что давление зависело от способа и времени закрытия крана, а максимальное давление зависело только от скорости течения воды. В опытах Карпентера был также впервые исследован способ снижения максимального давления с помощью воздушного демпфера.

В конце XIX века, в связи с многочисленными авариями на московском водопроводе, к работе комиссии по разбору и изучению причин этих происшествий был привлечен Н. Е. Жуковский, уже широко известный к тому времени своими фундаментальными научными достижениями. В 1878 г. он организовал кафедру теоретической механики в Императорском московском техническом училище, которой заведовал, а с 1887 г. стал и заведующим кафедрой механики Московского университета. В 1897–98 гг. под руководством Жуковского были проведены всесторонние исследования гидравлического удара в натурных условиях на Алексеевской водокачке. Материалы экспериментов хорошо согласовывались с разработанной им теорией. Жуковский сделал ряд сообщений о своей работе на различных собраниях, а полностью работа «О гидравлическом ударе в водопроводных трубах» была доложена в 1898 г. на IV Русском водопроводном съезде и в этом же году напечатана в «Бюллетенях политехнического общества» [17]. В работе рассмотрены переходные процессы, возникающие в воде, текущей в горизонтальной цилиндрической трубе, при быстром закрытии задвижки. Гидравлический удар, как установил Жуковский, происходит из-за возникновения и распространения в трубе ударной волны, обладающей высокой скоростью (примерно 1000 м/с) (рис. 1). «Я полагаю, — писал Жуковский, — что упомянутое обстоятельство было упущено из виду потому, что наблюдения не делались над длинными трубами; в коротких же трубах, вследствие громадной скорости распространения ударной волны, поднятие давления представляется происходящим вдоль всей трубы мгновенно». В основе теории Жуковского лежат уравнения движения жидкости и упругости стенок трубы; деформация стенок полагалась равной статической, производимой мгновенным давлением, скорость жидкости и давление принимались распределенными равномерно по поперечному сечению трубы, что в итоге означало пренебрежение массой стенок трубы и силами инерции, вызываемыми радиальным движением жидкости. Жуковским впервые было установлено, что явление, обычно называемое инженерами гидравлическим ударом, представляет собой акустическую волну и может быть исследовано в рамках хорошо изученного к тому времени классического волнового уравнения. Другим важным результатом было установление формулы для определения максимального давления, возникающего при мгновенном закрытии заглушки:

$$p - p_0 = \rho_0 v_0 c,$$

из которой следует, что повышение давления в трубе прямо пропорционально скорости, потерянной при ударе, и скорости распространения ударной волны. Если к упомянутому выше добавить приведенные в работе рекомендации по способам предупреждения гидравлических ударов и методику определения, по экспериментальной диаграмме давления, мест утечек воды и мест образования воздушных пробок в трубе, то неудивительно, что эта работа снискала Жуковскому мировое признание. Вскоре после ее опубликования работа была переведена на немецкий, английский, французский языки и на многие годы вперед предопределила развитие теории гидроупругости трубопроводных систем. «Как эта работа не похожа на старые классические исследования по механике. Как она близка нашему времени», — восклицает академик С. А. Христианович [18].

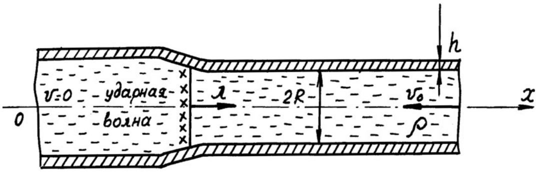


Рис. 1. Схема задачи о гидравлическом ударе (Н.Е. Жуковский)

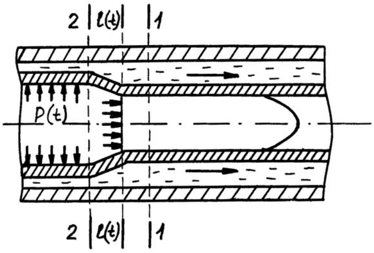


Рис. 2. Схема задачи о гидравлическом ударе в системах охлаждения (Г.Т. Алдошин)

Примерно в одно время с Н. Е. Жуковским и независимо от него итальянский инженер Л. Аллиеви критически проанализировал все предыдущие исследования и заново вывел многие из известных формул. Он также предложил метод расчета кривой давление–время и способ определения величин максимального роста и перепада давления в случае линейного закона закрытия клапана [19].

За прошедшие 100 с небольшим лет со времени выхода в свет работы Н. Е. Жуковского как в нашей стране, так и за рубежом опубликовано огромное число статей, монографий и книг по гидравлическому удару. Особую актуальность исследования волновых процессов в трубопроводных системах приобрели в связи с развитием энергетики, трубопроводного транспорта, широким использованием гидравлических и топливных систем в авиационной и ракетной технике. Дать сколько-нибудь подробный анализ всех этих работ в краткой статье не представляется возможным. Ограничимся замечанием, что достаточно детально эти работы отражены в обзорах Гудсона [20] (по состоянию на 1970 г.) и автора настоящей статьи [21] (по состоянию на 1990 г.).

Одновременно не прерывались исследования по уточнению и обоснованию отдельных положений модели Жуковского. Число таких работ достаточно велико, часть из них отражена в упомянутых выше обзорах. Но уточнения проводились за счет усложнения либо модели стенок трубы, либо модели движения жидкости. Но при таком подходе, как справедливо заметил Е. Н. Мнёв [22], упускается из виду необходимость согласования по точности моделей жидкости и оболочки. Первая такая попытка была сделана Р. Скалаком [23]. Основные выводы, которые можно сделать из анализа упомянутых работ, сводятся к тому, что основные особенности гидравлического удара теория Жуковского отражает правильно. Оценки показывают, что для маловязких жидкостей в гидросистемах, не имеющих весьма протяженных коммуникаций малого сечения, влияние трения мало. При значительной вязкости искажение профиля бегущей волны и ее затухание возрастает. Учет изгибной жесткости становится заметным только для очень коротких волн. Интенсивность возникающего при этом перед головной волной так называемого предшественника мала и его влияние на давление в жидкости несущественно. Можно считать, что к настоящему времени процессы, возникающие при течении жидкости в упругом трубопроводе и в оболочечных конструкциях, в постановке задачи Н. Е. Жуковского, изучены достаточно подробно и как необходимый элемент входят в руководства по прикладной гидродинамике.

С увеличением интенсивности волны и при течении в канале переменного сечения задача резко усложняется: уравнения становятся нелинейными, с переменными коэффициентами. В середине XIX века С. Ирншоу и Б. Риманом были впервые проанализированы нелинейные эффекты, возникающие при распространении волны давления в сжимаемой среде, и разработан метод характеристик, ставший теоретической базой многих численных методов. Ж. Массо использовал этот метод для графического интегрирования уравнений гиперболического типа, а А. Фавр [24] рассчитал гидравлический удар в коническом трубопроводе. Н. Т. Мелещенко [25] и Л. Бержерон [26] создали единый однообразный расчетный метод, позволяющий рассчитывать динамические модели с распределенными и сосредоточенными параметрами (трубопровод — уравнительная шахта — тоннель), включая модели для цилиндрического трубопровода с трением, трубопровода из нескольких участков и т. д.

Новый подъем исследований по гидроупругости, начавшийся после второй мировой войны, был инициирован, в первую очередь, авиационной и ракетной техникой. Возник комплекс задач, связанных с движением механических систем, состоящих из упругих тел, наполненных жидкостью, а также с динамической устойчивостью гидросистем управления летательным аппаратом и т. п.

Изучению аэрогидроупругости таких систем посвящена огромная литература, поток которой непрерывно расширяется. В послевоенные годы подобные задачи интенсивно изучались для тонкостенных оболочек в потоке жидкости или газа. Подробное исследование приводится в монографиях [27]–[29], там же приведена подробная библиография по этому вопросу.

В конце 50-х годов внимание исследователей привлекла задача о распространения волны давления в системе двух соосных оболочек типа «труба в трубе», зазор между которыми заполнен жидкостью, а вдоль поверхности одной из труб движется осесимметричная волна давления. Впервые с подобной проблемой столкнулись при разработке систем межслойного охлаждения стволов артиллерийских орудий [30]. Практическое применение получили системы межслойного охлаждения, в которых отвод тепла, выделяющегося при горении пороха и нагревающего ствол, производился водой, циркулирующей в зазоре между стволом и надетым на него кожухом (рис. 20). При экспериментальной отработке конструкции был обнаружен факт возникновения в дульной части ствола пика давления, которое нередко превосходило давление пороховых газов в соответствующем сечении ствола. Удовлетворительного объяснения этого парадоксального явления не удавалось найти, так как расчеты по классической теории Ламе–Гадолина показывали, что давление в жидкости не должно превосходить 15–20 % давления пороховых газов. Для классической теории гидравлического удара эта задача оказалась новой. Физическая картина развития процесса ударно-волнового течения жидкости отличается здесь от рассмотренной Н. Е. Жуковским и представляется следующей. Под действием давления газа в заснарядном пространстве $P(t)$ деформируются стенки ствола, приводя к уменьшению площади проходного сечения канала охлаждения, давление в жидкости повышается и в виде волны гидравлического удара распространяется вдоль канала, а сама зона деформирования $2-l(t)-1$ со скоростью снаряда движется к дульной части. Изменение площади происходит в малой области вблизи дна снаряда $l(t)$, и потому ее можно схематизировать скачком площади поперечного сечения, который перемещается вдоль ствола со скоростью снаряда и, подобно поршню, нагнетает жидкость, генерируя рост давления перед снарядом. Первая достаточно корректная модель явления была предложена в работах автора ([31], [32]). В рамках основных допущений теории Н. Е. Жуковского (линеаризация уравнений для жидкости и квазистатическая деформация стенки ствола) задача была сведена к системе волновых уравнений, и ее решение было записано в форме Даламбера для давления жидкости $p(x, t)$ и расхода $Q(x, t)$ в области перед снарядом $0 \leqslant x \leqslant l(t)$ и за снарядом $l(t) \leqslant x \leqslant L$,

$$p(x,t) = a_1 \frac{K}{E} p(t) + f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

$$Q(x,t) = -\rho F_0 u(t) + \frac{F_0}{c} f_1(x-ct) - \frac{F_0}{c} f_2(x+ct)$$

в области заснарядного пространства $0 \leq x \leq l(t)$,

$$p(x,t) = h_1(x-ct) + h_2(x+ct),$$

$$Q(x,t) = -\rho F_0 u(t) + \frac{F_0}{c} h_1(x-ct) - \frac{F_a}{c} h_2(x+ct)$$

где L — длина участка охлаждения, $u(t)$ — скорость отката ствола, F_0 — площадь свободного проходного сечения канала жидкости.

Произвольные волновые функции определяются из начальных и граничных условий на входе и выходе жидкости из системы охлаждения и условий «сшивания» решений до- и за снарядом на скачке площади сечения $l(t)$. Принципиальным моментом решения является введение скачка площади сечения и запись на скачке законов сохранения типа ударных волн [33].

Главный вывод из полученного решения состоит в установлении факта формирования пика давления за счет волны сжатия в жидкости на фронте движущегося снаряда: интенсивность волны растет с увеличением скорости снаряда, чем и объясняется совпадение максимального давления в дульной части по времени с моментом прохода снаряда. При приближении скорости снаряда к скорости звука наступает «акустический резонанс»: давление возрастает неограниченно. Статья [32] была впервые опубликована в 1966 г. и послужила основой изданного ограниченным тиражом руководящего материала по расчету систем охлаждения стволов. Поскольку содержание статьи, помимо исторического интереса, представляет и определенное научное значение, она перепечатана в сборнике материалов конференции «Пятые Окуневские чтения» [34].

Задачи, подобные рассмотренной, возникают также при определении динамических нагрузок на оборудование и при анализе устойчивости упругих чехлов топливных кассет в реакторах водо-водяного типа [35], а также при расчетах на прочность и надежность подземных трубопроводов, подвергающихся сейсмическим воздействиям [36] и т. д.

Пионерская работа Л. Эйлера, которая долгое время не была известна широкому кругу механиков (можно заметить, что даже Н. Е. Жуковский, ссылаясь на ряд предшественников, Л. Эйлера не упоминает) в настоящее время обрела второе дыхание. Понадобилось много времени и усилий выдающихся механиков и биологов, чтобы «новый день в физиологии», о котором мечтал Д. Бернулли, наступил.

Исследования распространения волн давления в заполненных жидкостью трубах привлекают все большее внимание биофизиков. Со времени открытия У. Гарвеем в XVII веке системы кровообращения накоплен значительный банк данных о строении и функциях сосудистой системы, сформулированы основные принципы организации системы кровообращения. В 60-х годах прошлого века начались разработки математических моделей сердечно-сосудистой системы, причем авторы уже первых моделей пытались учесть в них не только гемодинамику, но и регуляцию. Количество работ в этой области непрерывно растет, и дать в настоящей статье сколько-нибудь подробный анализ не представляется возможным; ограничимся ссылкой на монографии и обзоры [37]–[39], содержащие также обширную библиографию.

«Придет время — пусть отдаленное, когда математический анализ, опираясь на естественнонаучный, осветит величественными формулами уравнений все эти уравновешивания, включая в них, наконец, и самого себя», — мечтал великий физиолог И. П. Павлов. Успехи современной медицины и физиологии, стремительное развитие вычислительной техники и прикладной математики позволяют надеяться, что эта перспектива окажется не столь отдаленной.

Статья Л. Эйлера, опубликованная в 1862 г. на латинском языке, до сих пор не переведена ни на русский, ни на какой-либо западноевропейский язык. Возможно, поэтому она не получила в свое время широкой известности среди механиков и должного приложения. Но, тем не менее, корни современных теорий гидроупругости и гемодинамики — в «Principia...», и в этом состоит ее непреходящее значение. «Читайте Эйлера, он наш общий учитель», — завещал Лаплас молодым математикам. На наш взгляд, мало кто из современных молодых, да и не очень молодых ученых может свободно читать Эйлера в оригинале, тем более учитывая труднодоступность этих оригиналов. Все сказанное подчеркивает необходимость перевода работы на русский язык.

Литература:

1. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936.
2. *L. Euleri.* Principia pro motu sanguines per arteria determinando // OP. Petropoli, 1862. P. 814–823.
3. История механики в России. Киев: Наукова думка, 1987.
4. *Иваницкий Г. Р.* 275 лет Российской Академии наук и история биофизики // Биофизика. 1999. Т. 44. № 6. С. 965–979.
5. *Копелевич Ю. Х.* Материалы к биографии Эйлера // ИМИ. Вып. 10. М.: Гостехиздат, 1957. С. 9–55.
6. *Бернулли Д.* Гидродинамика или записки о силах и движении жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
7. *Михайлов Г. К.* Записные книжки Л. Эйлера в Архиве АН СССР // ИМИ. Вып. 10. М.: Гостехиздат, 1957. С. 67–94.
8. *Young T.* Hydraulic investigation subservient to an intended Gronian Lecture on the motion of the blood // Phil. Trans. Roy. Soc. of London. 1808. Vol. 98. P. 164–186.
9. *Weber E.* Über die Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreislauf des Blutes und insbesondere auf die Pulslehre. Berichte über die Verhandlungen der Königlichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig. Vol. 18. 1850. P. 353–357.
10. *Resal H.* Note sur les petits mouvements d'un fluide incompressible dans un tuyau élastique // Journal de mathématiques pures et appliquées. Paris, 1876.
11. *Korteweg D.* Over voorplatingsnelheid van golven in elastische buizen. Leiden, 1878.
12. *Громеко И. С.* О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубах. Казань, 1883.
13. *Lamb H.* Über die Geschwindigkeit des Schalles unter Einfluss der Elastizität der Wände // Manchester Literary & Philosophical Soc. Memories & Proc. Vol. 42. № 9. 1898.
14. *Streeter V. L.* Handbook of fluid dynamics. N. Y., 1961.
15. Journal of Franklin Institute. 1890.
16. *Carpenter R.C., Barraclough S.H.* Same experiments on the effect of water hammer // Transactions of the ASME. Vol. 15. 1894. P. 510–535.
17. *Жуковский Н. Е.* О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
18. *Христианович С. А.* Научное наследие Н. Е. Жуковского. М.: Изд-во бюро научной инф. ЦАГИ, 1951.
19. *Allievi L.* Teoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione // Annali della Società degli ingegneri e degli architetti italiani. Vol. 17. N. 5. 1902. P. 285–325.
20. *Гудсон.* Обзор методов моделирования переходных процессов в гидравлических линиях // Теоретические основы инженерных расчетов. Т. 94. Сер. Д. 2. 1972.
21. *Алдошин Г. Т.* Внутренние сопряженные задачи аэрогидроупругости. Модели механики сплошной среды. Сб. сборник докладов и лекций XIV Международной школы по моделям механики сплошной среды. 17–24 августа 1997 г., г. Жуковский, Россия. М., 1997. С. 4–15.
22. *Мнёв Е. Н.* Реакция погруженной в жидкость цилиндрической оболочки на волну давления, распространяющуюся со сверхзвуковой скоростью в направлении образующей // Инженерный журнал. МТТ. 1968. № 3. С. 119–125.

23. *Skalak R.* An extension of the Theory of Water Hammer. Part 1, 2 // Water Power. Vol. 7. 1955. N. 15. P. 17–22; Vol. 8. 1956. N. 1. P. 458–462.

24. *Favre H.* Théorie des coups de bélier des conduits à caractéristiques linéarement variables le long de l'axe // Revue général de l'Hydraulique. 1938. P. 19–24.

25. *Мелещенко Н. Т.* Общий метод расчета гидравлического удара в трубопроводах // Известия научно-исследовательского института гидротехники. М.; Л., 1941. Т. XXIX.

26. *Бержерон Л.* От гидравлического удара в трубах до разряда в электрической сети. М.: Машгиз, 1962.

27. *Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С.* Динамические нагрузки при подводном взрыве. Л.: Судостроение, 1967.

28. Нестационарная аэроупругость тонкостенных конструкций / Под ред. А. В. Кармишина. М.: Машиностроение, 1982.

29. Методы расчета оболочек. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек / А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко и др. Киев: Наукова думка, 1982.

30. *Леонтьев Н., Кудрявцев А.* Корабельная универсальная артиллерия среднего калибра. Пути развития // Военный парад. 2002. № 3.

31. *Алдошин Г. Т.* Гидравлический удар в деформированном трубопроводе // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математики, механики и астрономии. 1961. Вып. 4. С. 93–102.

32. Гидравлический удар в системе межслойного охлаждения стволов // Оборонная техника. 1966. № 7. С. 49–54.

33. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Гостехиздат, 1955.

34. Гидравлический удар в системе межслойного охлаждения стволов // Международная конференция «Пятые Окуневские чтения». 26–30 июня 2006 г., Санкт-Петербург. Материалы докладов. Т. 1. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т., 2007.

35. *Катковский Е. А., Полетаев Г. Н.* Волновые процессы в гидросистемах / Препринт ИАЕ № 249. М., 1975.

36. *Рашидов Т. Р.* О действии сейсмических волн на циллиндрический туннель с жидкостью // Изв. АН УзССР. Сер. Техн. науки. № 5. С. 43–47.

37. *Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У.* Механика кровообращения. М.: Мир, 1981.

38. *Лищук В. А.* Математические модели сердечно-сосудистой системы // Итоги науки и техники. Бионика, биокибернетика, биоинженерия. Т. 7. М.: ВИНИТИ, 1990.

39. *Абакумов М. Б., Гаврилюк К. В., Есикова Н. Б. и др.* Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 2. С. 106–117.

Н. Н. Кизилова
Харьков, Украина

Л. Эйлер и история биомеханики

Abstract: L. Euler's contribution to biomechanics is examined. Some historical facts concerning the publication of Euler's manuscripts on the movement of the blood through rigid and distensible tubes are presented. Also discussed are the results obtained by Euler on the mechanics of blood flow in the vessels, hearing, Euler's problem of the stability of a rod under pressure and the influence of his works on the further development and achievements of contemporary biomechanics.

Исследование процессов, протекающих в биологических организмах, всегда вызывало интерес у многих выдающихся математиков, механиков, физиков. Галилео Галилей исследовал особенности движения животных и механизмы пульсации артерий, ему принадлежат первые количественные измерения частоты пульса. В 1680 г. был опубликовал первый печатный труд по биомеханике «О движении животных», автором которого являлся ученик Галилея Джиованни Борелли. Используя термоскоп Галилея, Борелли впервые сравнил температуру в разных участках тела и показал, что она мало отличается в сердце и в легких животного, тем самым опровергнув гипотезу Аристотеля о том, что движущей силой кровообращения является перепад температур между горячим сердцем и холодными легкими. Механик Роберт Гук, философ Рене Декарт, естествоиспытатель Антони ван Левенгук, врач Жан Мари Пуазейль — представители самых разных наук — занимались исследованиями живых систем. Некоторые задачи, относящиеся к биомеханике, были впервые поставлены и решены выдающимся математиком, механиком, физиком и астрономом Леонардом Эйлером, и серьезно повлияли на дальнейшее развитие этой науки.

Л. Эйлер и его работа «Основы определения движения крови через артерии»

В 1726 г. Эйлер получил приглашение от Петербургской Академии наук переехать в Петербург и занять место адъюнкта (помощника профессора) по физиологии ([1], [2]). В то время в Петербурге уже работали друзья Эйлера Николай и Даниил Бернулли, которые переехали туда в 1725 г., также по приглашению Петербургской Академии наук. Уезжая, братья обещали пригласить Эйлера, как только появится вакантное место. Даниил Бернулли начал свою деятельность в Петербурге в должности профессора физиологии. Его первое научное сообщение, сделанное на заседании конференции Императорской Академии наук, было посвящено проблемам секреции жидкостей животными. Впоследствии он занялся задачами механического описания мышечного сокращения, продолжая исследования своего отца, доктора медицины и профессора математики Иоганна Бернулли, медицинская диссертация которого называлась «О движении мускулов». Даниил Бернулли моделировал сокращение и расслабление мышц как работу пружин, занимался исследованиями физиологии зрения, проводил эксперименты на зрительном нерве. Занятия физиологией сочетались у него с интенсивной работой в области математики и механики. Бернулли занимался вопросами сложения и разложения движений и сил, которые явно были навеяны его интересом к механическому описанию движений человека и животных, производимых сокращениями разных групп мышц.

В июле 1726 г. Николай Бернулли умер от аппендицита, Даниил Бернулли занял его место профессора кафедры математики, и у Петербургской Академии наук появилась вакансия по кафедре физиологии. В то время физиология была в большей степени описательной и экспериментальной наукой. Бернулли полагал, что процессы в биологических организмах не могут быть изучены без использования математики. Мысль о том, что математика является ключом ко всем наукам, была высказана впервые еще Галилеем, а в труде Дж. Борелли были применены принципы механики (законы рычага, сообщающихся сосудов и другие) и математические подходы к описанию процессов, протекающих в живых организмах. Даниил Бернулли хотел создать в Петербурге новую школу физиологии, которая смогла бы внести рациональные основы, количественные меры и математическую точность в физиологию. Именно с такой целью Бернулли рекомендовал пригласить на должность адъюнкта физиологии своего друга математика Леонарда Эйлера. В одном из писем Эйлеру Бернулли писал: «Я хотел бы, чтобы в Петербурге были медики, знающие начала математики, в особенности же — механику и гидравлику». Бернулли в своих письмах настоятельно советовал Эйлеру прочитать книги, «в которых излагается физиология в применении к геометрическим началам», в том числе труд Дж. Борелли. Эйлер принял приглашение, но отъезд в Россию отложил до весны следующего года. Он надеялся получить должность профессора физики в своей alma mater — Базельском университете [3]. За это время Эйлер написал трактаты по алгебраическим траекториям и о наилучшем размещении мачт на корабле, которые, по-видимому, стали его двумя первыми статьями. Последний трактат Эйлер представил на конкурс Парижской Академии наук в 1727 г. Эта работа молодого исследователя была удостоена второй премии. Как соискатель на должность профессора Базельского университета, Эйлер подготовил труд по акустике («Dissertatio physico de sono»), который считается его докторской диссертацией и впоследствии стал классическим, однако должность была отдана другому претенденту [4]. Вероятно, девятнадцатилетнего Эйлера сочли слишком молодым [3]. Через несколько дней после этого, 5 апреля 1727 г., Эйлер уезжает в Россию и 17 мая 1727 г. прибывает в Петербург, однако занимается он не физиологией, а математикой, к которой чувствует бо́льшую склонность. Тем не менее, именно Леонарду Эйлеру принадлежит труд, с которого берет начало современная механика кровообращения, и титул «отца гемодинамики» [5].

В первой половине XVIII века физиология кровообращения была достаточно хорошо изучена, и стало очевидным, что именно физические механизмы лежат в основе циркуляции крови по сосудам, растяжения и сокращения сосудов в такт с сокращениями сердца. В 1616 г. Уильям Гарвей открыл замкнутость системы кровообращения, высказав предположение о существовании капилляров, которые в 1661 г. сумел разглядеть Марчелло Мальпиги — один из основателей микроскопической анатомии. Рене Декарт проводил эксперименты на животных и измерял объем крови, выбрасываемой камерами сердца. Борелли впервые применил законы гидравлики для исследования течения крови по сосудам с разными диаметрами. Стивен Хейлз, используя закон сообщающихся сосудов, впервые измерил «кровавым» методом (путем введения в артерию вертикальной трубки и измерения высоты столба поднявшейся по ней крови) величину артериального давления лошади, а затем и других животных. Хейлз впервые рассчитал скорость движения крови в капиллярах, измеряя в ходе микроскопического наблюдения расстояние, которое проходили отдельные эритроциты за определенное время, ввел понятия ударного объема сердца, емкости сосудов и понятие «силы крови», аналогичное давлению в движущейся жидкости. Можно сказать, что идеи использования математических подходов к описанию движения крови в сосудах разного калибра давно витали в воздухе.

28 августа 1742 г. Эйлер в письме Х. Гольдбаху писал, что в марте он направил свой трактат по движению жидкостей в эластичных трубках в Дижонскую Академию наук, которая объявила конкурс сочинений, но не получил ответа. Тема конкурса была связана с выявлением различий в скорости движения жидкости по недеформируемым и деформируемым трубкам («Déterminer la différence des vitesses d'un liquide qui passe par des tuyaux inflexibles et de celui qui passe par des tuyaux élastiques»), а призовой фонд составлял 30 луидоров. Эйлер сокрушался, что манускрипт может быть безвозвратно утерян, а он не оставил себе копии. Но работа не была утеряна и оказалась в числе одной из трех, награжденных в конкурсе 1743 г. Впоследствии было выяснено, что по правилам Академии данные об авторах и девизы поступивших на конкурс работ хранились в отдельных запечатанных конвертах. После определения победившей работы конверт с именем победителя вскрывался, а остальные уничтожались. В конкурсе 1742 г. победил некто Daché, поэтому Эйлер и не получил уведомления о судьбе своего труда. В то же время, в соответствии с правилами, манускрипты, присланные на конкурс, хранились в коробках. Однако в коробке с цифрой 1742 не было обнаружено мемуаров, датированных ранее, чем 1765 г., поэтому неизвестно, был ли манускрипт Эйлера утерян или и сейчас хранится где-то в архивах [5].

Эйлер прожил в Петербурге почти 15 лет. В 1733 г. после отъезда Д. Бернулли он перешел на кафедру математики, а в 1741 г. в связи с неблагоприятной политической ситуацией в России переезжает в Берлин, и вновь возвращается в Петербург в 1766 г. В 1755 г. он опубликовал трактаты, в которых исследовались основные принципы равновесия и движения жидкостей и газов ([6], [7]). Можно сказать, что давний интерес к задаче о течении крови, которая не могла быть решена без разработки соответствующего математического аппарата механики жидкостей, стимулировал Эйлера к развитию гидромеханики. Само слово «гидродинамика» вошло в науку послу успеха одноименной книги Даниила Бернулли, опубликованной в 1738 г. В книге была изложена новая теория движения воды по каналам, обобщены на случай жидкости принципы сохранения живых сил и неразрывности (закон сохранения массы сплошной среды). В «Гидродинамике» был сформулирован закон сохранения массы на основе «гипотезы о перпендикулярных слоях». В соответствии с этой гипотезой, поток жидкости мысленно разбивался на слои, перпендикулярные к вектору скорости установившегося движения жидкости, и предполагалось, что частицы одного слоя движутся с равными скоростями, то есть задача практически сводилась к одномерной. Иоганн Бернулли считал, что исследования его сына базируются «на косвенных основаниях» и занимался поиском более общего метода для математического описания движения жидкости. В 1743 г. он опубликовал свой мемуар «Гидравлика, теперь впервые открытая и обоснованная на исключительно механической основе», где использовал «прямой метод, который основывается только на таких динамических принципах, которые никто не оспаривает». В мемуаре речь идет о гидродинамике, а не о гидравлике в современном понимании этого термина. Принцип, использованный И. Бернулли, состоял в том, что уравнения движения Ньютона записывались для мысленно выделенного бесконечно малого элемента жидкости, так что задача сводилась к решению дифференциального уравнения. Однако И. Бернулли также не получил общих уравнений движения жидкости, а рассмотрел лишь случай одномерных течений. Эйлер имел возможность ознакомиться с первой частью труда Иоганна Бернулли еще в конце 1738 г., и в одном из своих писем Бернулли написал, что он «осветил этот вопрос ярчайшим светом, потому что раньше этот предмет был скрыт от меня в густой мгле и уяснить что-либо можно было только с помощью косвенного метода». Использованный Бернулли общий динамический принцип, несомненно, стимулировал исследования Эйлера по механике жидкости, а затем и по исследованию механики кровообращения [8].

21 декабря 1775 г. на заседании Петербургской Академии наук Эйлер выступил с докладом «Основы определения движения крови через артерии». Одноименный трактат «Principia pro motu sanguinis per arterias determinando» был опубликован посмертно в 1862 г. [9]. В этой работе Эйлер впервые представил уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости, исследуя периодическое течение крови по артериям за счет сокращений сердца, которое рассматривалось как насос. В известных комментариях Трусделла [10] эта работа Эйлера не разбирается, а лишь упомянута как «замечательный фрагмент». Первая часть рукописи утрачена, и текст начинается с 15-го параграфа. Впоследствии утраченная часть этого труда была обнаружена Г.К. Михайловым и опубликована в «Opera Omnia» в 1979 г. В этом параграфе приведены уравнения неразрывности и импульсов для одномерного движения жидкости по трубке переменного сечения. Вероятно, вывод и обсуждение этих уравнений содержались в предыдущих параграфах. Поскольку именно Эйлер ввел современный математический язык, уравнения и преобразования, содержащиеся в трактате, легко понять, следует только упомянуть, что круглые скобки использовались Эйлером для обозначения частных производных, а уравнения движения для пульсирующего течения жидкости по упругой трубке записаны им в виде:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)+\left(\frac{d\cdot vs}{dz}\right)=0,\ 2g\left(\frac{dp}{dz}\right)+v\left(\frac{dv}{dz}\right)+\left(\frac{dv}{dt}\right)=0, \tag{1}$$

где t — время, z — продольная координата, s — площадь поперечного сечения сосуда, p и v — средние по сечению давление и продольная скорость движения жидкости, g= 1/(2ρ) — удельный объем жидкости с учетом симметрии течения относительно оси трубки.

Эта модель была также обобщена Эйлером на случай сжимаемой жидкости (здесь и далее используются современные обозначения):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho s v)=0,\ \ \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial}{\partial z}(p+\varphi),$$

где φ — потенциал внешних массовых сил, и доложена на заседании Петербургской Академии наук (LEOO II, 13, с. 158–160).

Для замыкания задачи (1) необходимо задать зависимость площади сечения трубки от давления жидкости, точнее, от разности давлений в трубке и в окружающей среде. Эйлер постулировал два реологических соотношения *s(p)* для стенки, которые дают сходные возрастающие зависимости:

$$s=\frac{\Sigma p}{c+p}\ \text{и}\ s=\Sigma(1-\exp^{-p/c}), \qquad (2)$$

где c — эмпирическая константа, а $\Sigma=\lim\limits_{p\to\infty}s(p)$ — максимальное значение s.

Хотя ни одна из зависимостей (2) не соответствует экспериментальным данным, полученным для кровеносных сосудов, для которых замыкающее соотношение аппроксимируется зависимостями [11]:

$$\begin{array}{c} s=s_0(1-p/p_0)^{-2/3} \\ s=s_0(1+0.1p/p_0) \end{array}\ \text{при}\ \begin{array}{c} s<s_0 \\ s>s_0 \end{array},$$

где s_0 — начальное сечение трубки в нерастянутом состоянии, $p_0=p(s_0)$, формулировка Эйлером задачи об одномерных нестационарных течениях жидкости в упругих трубках явилась важнейшей вехой в истории механики кровообращения.

Далее в параграфах трактата с 16-го по 34-й рассмотрен частный случай жесткой трубки ($s=s(z)$). Тогда из первого уравнения (1) следует $\nu s=T(t)$, где T имеет смысл объемного расхода, переменного при пульсирующем течении жидкости. Если в каком-то сечении трубки b известна скорость течения $V(t)$, то $\nu s=bV(t)$ Вычисляя отсюда производные $\partial\nu/\partial t$ и $\partial\nu/\partial z$, подставляя их во второе соотношение (1) и интегрируя, Эйлер находит распределение давления в трубке:

$$2gp(t,z)=-b\frac{dV}{dt}\int\frac{dz}{s(z)}-\frac{b^2V^2}{2s^2}+C.$$

Значение постоянной интегрирования C он находит из условия, что при $s=b$ давление $p=P$, откуда $C=2gP+V^2/2$, так что распределение давлений вдоль трубки переменного сечения *s(z)* принимает вид:

$$2gp(t,z)=2gP+\frac{V^2}{2}\left(1-\frac{b^2}{s^2}\right)-b\frac{dV}{dt}\int\frac{dz}{s(z)}.$$

Для связанной системы сердце–аорта Эйлер использовал модель двух последовательно соединенных каналов разной ширины, течение крови по которым описывается условием независимости объемного расхода от продольной координаты: $T=T(t)$ (то есть $\nu_1 s_1=\nu_2 s_2$). В качестве частного случая проанализировано течение крови в канале постоянного сечения $s=const$.

Затем Эйлер попытался применить метод, использованный им для жесткой стенки, к случаю упругой стенки $s=s(t,z)$. В параграфах с 35-го по 42-й содержатся соответствующие преобразования, однако Эйлеру не удалось найти решения сформулированной им задачи. В последнем 43-м параграфе манускрипта он написал, что при решении задачи столкнулся с непреодолимыми трудностями, что ее решение превосходит человеческие силы, и заключил: «Если бы Бог хотел, чтобы мы поняли течение крови по артериям, он не придумал бы такие сложные уравнения».

В 1850 г. уравнения Эйлера в линеаризованной форме были переоткрыты и исследованы Вебером [12], а в 1866 г. Бернард Риман разработал метод характеристик для решения гиперболических систем [13], что позволило получить решение задачи Эйлера (1)–(2) для течения крови в эластичных трубках в виде суммы бегущих волн. Впоследствии разными авторами исследовались решения задачи о пульсирующем течении крови как вязкой несжимаемой жидкости в упругих и вязкоупругих тонко- и толстостенных трубках из изотропного и анизотропного материалов (см., например, обзор в [14]).

Эйлер не рассматривал задачу о распространении волн давления по трубкам, но его математические исследования течения крови по артерии и, в особенности, заложенный им фундамент теоретической гидромеханики легли в основу всех последующих исследований в механике кровообращения. Соображения о волновом характере течения крови по сосудам впервые были сформулированы Томасом Юнгом, который оценил скорость распространения волн в заполненных жидкостью деформируемых трубках, обобщив на этот случай теорию Ньютона о распространении звука в воздухе [15]. Линейная теория была заложена в [12, [16], [17], [18] для плоских волн в упругодеформируемых трубках, заполненных невязкой жидкостью, а затем развита в работах [19], [20] для вязкой жидкости и вязкоупругой стенки трубки. В 1877 г. Моенс [27] и Кортевег [17], независимо друг от друга, опубликовали свои результаты исследования течений жидкости в тонкостенных упругих трубках, в соответствии с которыми скорость распространения волн в жидкости есть

$$c=\sqrt{\frac{Eh}{\rho D}},$$

где E — модуль Юнга материала стенки трубки, h и D — толщина стенки и внутренний диаметр трубки, ρ — плотность жидкости (формула Моенса–Кортевега).

Закономерности распространения и отражения плоских волн в заполненных невязкой жидкостью податливых трубках были детально исследованы в работах Лайтхилла [21]. В настоящее время одномерная задача является довольно популярной при исследовании пульсовых волн в артериях, а метод Римана используется при исследовании закономерностей распространения пульсовых волн в сложных системах деформируемых трубок, геометрия которых соответствует артериальным руслам ([22], [23]).

Уравнения Эйлера (1) и (2) представляют собой систему нелинейных уравнений в частных производных, аналогичных уравнениям теории мелкой воды и одномерным уравнениям динамики невязкого газа. В применении к волнам в артериях уравнения (1) являются слабо нелинейными, поэтому многие основные закономерности распространения пульсовых волн в артериях могут быть получены путем линеаризации системы (1) относительно состояния покоя $p=p_0$, $\nu=0$.

Последующие уточнения теории, развитой Эйлером, были связаны с исследованием линейных и нелинейных плоских и цилиндрических волн в вязкоупругих трубках и ветвящихся системах трубок при различных условиях закрепления стенки, наличии в ней остаточных напряжений, учете влияния нелинейных свойств, реологии и многослойной структуры стенки ([24], [25]) на дисперсию волн и параметры течения.

Для случая вязкой жидкости уравнения (1) были получены в [26], а в работе [27] путем интегрирования по сечению двумерных уравнений для вязкой жидкости были получены обобщенные уравнения (1) в виде:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(SU)=-q,\ \rho\left(\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+F(S,U),\ P(t,x)-P_e=G(S,x),$$

где $F=2\tau_w\sqrt{\pi/S}-\rho S^{-1}(q(t,x)(u_x|_w-U)-\partial/\partial x\int\limits_S(u_x^2-U^2)dS)$, ρ, u_x — плотность и продольная компонента скорости движения жидкости, индекс w относится к значению величин на стенке трубки, $P(t, x)$ − среднее по сечению давление, $U=S^{-1}\int\limits_S u_x dS$, $q(t, x)$ — отток жидкости через стенку трубки (в боковые ответвления или сосуды стенки артерии), $S(t,x)$ — площадь сечения трубки, P_e — давление в окружающей среде, τ_ω− среднее по периметру напряжение трения на стенке.

В последнее время наблюдается новый всплеск интереса к исследованию задачи Эйлера в усложненных постановках, поскольку в этом случае, используя метод Римана, можно выделить пульсовые волны, которые распространяются вверх и вниз по течению крови (проходящие и отраженные волны), волны разрежения и сжатия, что позволяет получить новую информацию, важную для медицинских приложений. Механика кровообращения представляет собой огромную и, пожалуй, наиболее разработанную область современной биомеханики. Это связано с актуальностью приложений теории к задачам медицинской диагностики сердечно-сосудистых патологий, а также с тем, что развитие физиологии, механики и математики способствовало ясному пониманию того, что в основе течения крови, сокращения сердца, пульсовых колебаний сосудов лежат физические механизмы, аналогичные тем, которые работают в технических трубопроводах и системах доставки жидкостей. Интерес к задачам биомеханики стимулировал развитие гидромеханики, а математический аппарат, развитый в работах Даниила и Иоганна Бернулли и Леонарда Эйлера, позволил решать задачи гидромеханики в сложной постановке, с учетом реологии крови как неньютоновской жидкости, нелинейно вязкоупругих свойств стенок сосудов, сложной геометрии русел.

Л. Эйлер и исследования глаза как оптической системы

Биомеханика глаза является в наши дни активно развивающейся теоретической и экспериментальной областью естественных наук, интерес к которой связан с особенностями глаза как оптической системы, необходимостью диагностики и лечения различных патологий зрительного аппарата. Биомеханика глаза изучает процессы, связанные с движениями и деформацией глазного яблока за счет сокращения соответствующих мышц, движением внутриглазной жидкости, секрецией и свойствами слезной жидкости, изменениями кривизны хрусталика и свойствами глаза как оптического аппарата. Огромный интерес к оптическим способностям глаза проявлял Л. Эйлер, и этот интерес был не только чисто познавательным, но был также связан с проблемами создания качественных линзовых систем для микроскопов и телескопов.

Эйлер рассматривал преломление лучей хрусталиком глаза как двояковыпуклой линзой [28] и вывел для такой линзы формулу геометрической оптики. Он также предложил метод расчета показателя преломления сред. Представления об устройстве глаза и его оптических свойствах Эйлер изложил в популярной форме в своих «Письмах к немецкой принцессе» ([29], [30]). В «Письмах» глаз рассматривается как оптимальный оптический инструмент, в котором природа умело скомбинировала среды с различными оптическими свойствами (показателями преломления), так что глаз как оптическая система не имеет хроматических аберраций. Дело в том, что хроматические аберрации линзовых систем (микроскопов, телескопов) составляли в то время серьезную проблему, ограничивавшую возможности получения качественных изображений объектов микро- и макромира. Исаак Ньютон считал, что хроматические аберрации присущи любым оптическим системам и избавиться от них невозможно. Эйлер показал, что ахроматический объектив можно создать, комбинируя две линзы из стекла с различными коэффициентами преломления. Он провел детальные расчеты оптических узлов микроскопов и телескопов [31]. Результаты, полученные Эйлером по оптике, изложены в его «Диоптрике», которая неоднократно издавалась и была переведена на разные языки [32]. Рассчитанный Эйлером объектив был впоследствии изготовлен английским оптиком Дж. Доллондом (1758 г.).

Говоря о хроматизме глаза, Эйлер писал: «Примечено, что сие отвратить можно, совокупляя различные прозрачные материи, но ни теория, ни практика не доведены еще до такого совершенства, чтоб можно было в самом деле отвратить все сии недостатки. Между тем глаз, который создатель сотворил, не имеет ни единого из сих несовершенств, и ни одного из тех, которому бы подвержен был глаз, по мнению упорного разума устроенный. Отсюда понимаем истинную причину, для чего премудрый создатель в сложении глаза употребил многие прозрачные материи, т. е. чтоб оградить его от всех несовершенств, которыми дела рук человеческих от божиих отличаются» [29]. В своих «Письмах к немецкой принцессе» Эйлер неоднократно подчеркивает, что никакой инженер никогда не смог бы создать такой совершенный оптический прибор, как глаз. Он предложил построить оптический узел, состоящий из двух выпукло-вогнутых линз с общей оптической осью, обращенных друг к другу вогнутыми сторонами, а пространство между ними заполнить водой.

Эйлер ошибался, считая, что глаз человека или животных лишен хроматической аберрации в силу своего совершенного устройства. Как было выяснено впоследствии, многие оптические несовершенства глаза компенсируются его биомеханикой и особенностями восприятия сигналов зрительного нерва мозгом. Эйлер и не изучал собственно биомеханические аспекты работы глаза, которые влияют, в частности, на кривизну хрусталика и его преломляющие свойства. Однако фундаментальные работы Эйлера по оптике и популярное изложение физических основ работы глаза как оптической системы в «Письмах к немецкой принцессе», выдержавшие 40 изданий на 10 языках, определили направление интересов многих поколений математиков, механиков, физиков, физиологов, которые своими исследованиями внесли вклад в развитие биомеханики глаза.

Л. Эйлер и биомеханика слуха

Современная биомеханика слухового аппарата человека и животных изучает особенности устройства уха как акустической системы, колебания различных элементов и тканей внутреннего уха, восприятие звука, особенности акустической эмиссии улитки уха, аудиометрию и многие другие теоретические и прикладные вопросы. В 1727 г. Эйлер защитил свою диссертацию по акустике. В то время теория предсказывала такие значения скорости распространения звука в средах, которые отличались от экспериментальных, и разработка положений акустики, которую тогда относили к газовой динамике, была актуальна для очень многих технических приложений.

В 1739 г. Эйлер опубликовал фундаментальный труд по теории слуха и теории музыки [33], в котором указал на многие аспекты работы слухового аппарата, в том числе на логарифмический закон восприятия звука, который впоследствии был открыт экспериментально и сейчас носит название закона Вебера–Фехнера:

$$W = \begin{cases} k \cdot \log \dfrac{I}{I_0}, & I > I_0 \\ 0, & I \le I_0 \end{cases},$$

где W — сила ощущения, I — интенсивность сигнала (раздражителя), I_0 — пороговое значение интенсивности. В этом труде Эйлер систематизировал и переработал знания из области теории музыки, которую он представлял как раздел математики, основывающийся на строгих физических принципах. В 9-м разделе трактата дана формула для частоты колеблющейся струны с заданной длиной и изгибной жесткостью. Эйлер считал, что теория музыки базируется на теории колебаний и акустике, а также на законах слухового восприятия гармоничных звуков, в основе которых лежат определенные соотношения частот [33]. Эйлер разработал математические основания для оценки согласуемости звуков, гармоничного восприятия их сочетаний. К сожалению, труд Эйлера по теории музыки и восприятия звука не получил должного признания. По-видимому, для музыкантов он был слишком математизирован, а для математиков — содержал слишком много информации по музыке и музыкальным инструментам [4]. В настоящее время этот труд рассматривается как третья основная книга его раннего петербургского периода ([3], [4]).

Результаты, полученные Эйлером, внесли существенный вклад в акустику и теорию восприятия звука слуховым аппаратом человека и, таким образом, оказали влияние на последующее развитие биомеханики уха и системы восприятия звука.

Задача Эйлера о потере устойчивости сжатого стержня

При определенных значениях сжимающей силы упругая система может иметь несколько различных положений равновесия, которые могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Эйлер предложил метод исследования устойчивости упругих систем по отношению к малым возмущениям и применил его к задаче о потере устойчивости стержня под действием сжимающей нагрузки. В соответствии с подходом Эйлера, рассматривается не собственно устойчивость стержня, а возможность наличия разных геометрических форм равновесия в случае, если внешняя сила превышает некоторое критическое значение. Эйлер получил выражение для этой критической силы $F^{*}=\pi^{2}EI/L^{2}$ (первая критическая сила), где L и I — длина и момент инерции сечения стержня относительно оси, E — модуль упругости материала. Эйлер также получил уравнения изогнутой оси стержня в параметрической форме:

$$x=\frac{2n}{k}\cos\alpha,\quad y=\frac{1}{k}(2(E-E(\alpha))-F+F(\alpha)),$$

где $E(\alpha)=\int\limits_{0}^{\alpha}\sqrt{1-n^{2}\sin^{2}\alpha}$. Теперь эта кривая называется эластикой Эйлера.

Задача Эйлера была впоследствии обобщена на случай стержней и стержневых систем, находящихся под действием комбинированной нагрузки (например, сжатия и кручения), стержней из вязкоупругих и нелинейноупругих материалов, сжатых вращающихся стержней, и других, которые нашли приложение в задачах биомеханики. Многие элементы органов и тел растений, животных и человека могут рассматриваться, в приближении, в виде балок и стержней, находящихся под действием сжимающей нагрузки. Эта нагрузка может быть обусловлена весом как самой балки, вышележащих частей тела, так и внешних сил. Известно, что процессы роста и развития биосистем существенно зависят от поля напряжений в теле и, таким образом, от приложенной к телу нагрузки. Эмпирические данные показывают, что сжимающие нагрузки угнетают, а растягивающие — стимулируют рост в соответствующем направлении [34]. При этом сжатие может стимулировать рост в направлении, ортогональном к линиям сжатия, что является компенсаторной ростовой реакцией.

Исследование формы сжатого стержня из растущего вязкоупругого материала проводилось в приложении к проблеме развития и формы сколиоза позвоночника [35], роста корня растения при наличии сопротивления почвы [34], роста стеблей и побегов растений [36], [37]. Таким образом, метод Эйлера, развитый им для исследования различных форм сжатого стержня, находит продолжение в задачах теоретической и технической механики и биомеханики.

Литература:

1. *Иваницкий Г. Р.* 275 лет Российской Академии наук и история биофизики // Биофизика. 1999. Т. 44. № 6. С. 965–979.

2. История механики в России. Киев: Наукова думка, 1987.

3. *Calinger R.* Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727–1741)//Historia Mathematica. Vol. 23. 1996. P. 121–166.

4. *Calinger R.* Frederick the Great and the Berlin Academy of Science (1740–1766) // Annals of Science. Vol. 24. 1968. P. 239–249.

5. *Cerny L. C.* Leonhardi Euleri's "Principia pro motu sanguinis per arterias determinando" // J. Biol. Phys. 1974. Vol. 2. P. 41–56.

6. *Euler L.* Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides // MAS Berlin, 1755. (= LEOO II, XII.)

7. *Euler L.* Principes généraux du mouvement des fluides // MAS Berlin, 1757. T. 11 (1755). P. 274–315 (= LEOO II, 12. P. 54–91.) (= *Эйлер Леонард*. Общие законы движения жидкостей // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1999. № 6. С. 26–54).

8. *Vischer D.* Daniel Bernoulli and Leonard Euler, the advent of hydromechanics // Hydraulics and Hydraulic Research: A Historical Review / Ed. G. Garbrecht. Rotterdam–Boston, 1987. P. 145–156.

9. *Euler L.* Principia pro motu sanguinis per arterias determinando // OP. T. 2. 1862. P. 814–823.

10. *Truesdell C. A.* Introduction. LEOO II, 13 (2). P. LXXVII.

11. *Pedley T. J., Luo X. Y.* Modelling flor and oscillations in collapsible tubes // Theoret. Comput. Fluid. Dyn. 1998. Vol. 10. P. 277–294.

12. *Weber E. H.* Ueber die Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreislauf des Blutes und insbesondere auf die Pulslehre. Berichte der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1850.

13. *Riemann G.* Ein Beitrag zu den Untersuchungen uber die Bewegung eines ussigen gleichartigen Ellipsoides. Technical report. Göttingen, 1866.

14. *Cox R. H.* Comparison of linearized wave propagation models for arterial blood flow analysis // J. Biomech. 1969. Vol. 2. № 3. P. 251–265.

15. *Young T.* Hydraulic investigations, subservient to an intended Croonian lecture on the motion of the blood // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1808. Vol. 98. P. 164–186.

16. *Громека И. С.* О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках. Сообщение на заседании о-ва естествоиспытателей Казанского ун-та, 1883 г. // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 172–183.

17. *Korteweg D.* Over de voortplantingsnelheid van golven in elastische buizen / Universiteit van Amsterdam. Acad. proefschrift. Amsterdam, 1878.

18. *Moens A. J.* Die Pulscurve. Leiden: Brill, 1878.

19. *Womersley J. R.* Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube // Philos. Magazine. 1955. Vol. 46. № 73. P. 199–221.

20. *Womersley J. R.* An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries // Tech. Report TR-56-614. 1957.

21. *Lighthill M. J.* Waves in Fluids. N. Y.: Cambridge University Press, 1978.

22. *Sherwin S. J., Franke F., Piero J., Parker K. H.* One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables // J. Eng. Math. 2003. Vol. 47. P. 217–250.

23. *Zenin O. K., Kizilova N. N., Philippova E. N.* Studies on the Structure of Human Coronary Vasculature // Biophysics. 2007. Vol. 52. № 5. P. 499–503.

24. *Кизилова Н. Н.* Распространение волн давления в заполненных жидкостью двухслойных вязкоупругих трубках // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Междунар. конф., посвящ. 85-летию со дня рождения акад. РАН И. И. Воровича. Т. 1. Ростов-на-Дону: Изд-во «ЦВВР», 2005. С. 103–107.

25. *Hamadiche M., Kizilova N. N.* Temporal and spatial instabilities of the flow in the blood vessels as multi-layered compliant tubes // Int. J. Dyn. Fluids. 2005. Vol. 1. № 1. P. 1–23.

26. *Shapiro A. H.* Steady flow in collapsible tubes // J. Biomech. Eng. 1977. Vol. 99. № 8. P. 126–147.

27. *Smit C. H.* On the modeling of the distributed outflow in one-dimensional models of arterial blood flow // Zeitschr. Angew. Mathem. Physik. 1981. Vol. 32. P. 408–420.

28. *Euler L.* Remarques sur quelques passages, qui se trouvent dans les trois volumes des Opuscules Mathématiques, de M. d'Alembert // Journal encyclopédique. 1765. Vol. 2 № 3. P. 114–127.

29. *Эйлер Л.* Письма о разных физических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе, с французского языка на российский переведенныя Степаном Румовским, Академии Наук членом, астрономом и профессором. Ч. III. СПб, 1774.

30. *Euler L.* Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie. T. 1. SPb., 1768.

31. *Euler L.* Dioptricae pars prima continens librum primum de explicatione principiorum, ex quibus constructio tam telescopiorum quam microscopiorum est petenda. Auctore Leon-

hardo Eulero acad. scient. Borussiae directore vicennali et socio acad. Petrop. Parisin. et Lond. Petropoli impensis Academiae Imperialis Scientiarum, 1769.

32. *Euler L.* Théorie générale de la dioptrique // OP. T. 2. 1862. P. 567–604.

33. *Euler L.* Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae. (1739). LEOO III, 1. P. 197–427.

34. *Регирер С. А., Штейн А. А.* Механические аспекты процессов роста, развития и перестройки биологических тканей // Итоги науки и техн. Компл. и спец. разделы механики. Т. 1. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 3–142.

35. *Ентов В. М.* О механической модели сколиоза // Известия АН СССР. Сер. МТТ. 1983. № 4. С. 201–208.

36. *Кизилова Н. Н.* О постановках задач механики растущих вязкоупругих сплошных сред // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Междунар. конф., посвященной 85-летию со дня рождения акад. РАН И. И. Воровича. Т. 2. Ростов-на-Дону: Изд-во «ЦВВР», 2005. С. 146–150.

37. *Кизилова Н. Н.* Обобщение задачи Эйлера об устойчивости стержня под действием сжимающей нагрузки на случай растущего вязкоупругого материала // «Классические задачи динамики твердого тела». Тезисы докладов конференции, посвященной 300-летию со дня рождения Леонарда Эйлера. Донецк, 2007. С. 36–37.

И. А. Тюлина
Москва, Россия

О работах Л. Эйлера по теории гидравлической турбины

Abstract: Euler's original theory of turbine is treated in the paper.

Основными промышленными двигателями к XVII в. были водяные колеса различных типов: нижнебойные, верхнебойные, наливные, мутовчатые (на Руси), в которых вода действовала либо ударом, либо тяжестью (в ковшах).

Однако на эффективность водяных колес влияли погодные условия (засуха), а также изменения сезона года, которые приводили к понижению уровня воды в реке. Изобретательская мысль работала в поисках способов повышения эффективности водяных колес.

Можно привести примеры изобретений примитивных горизонтальных колес, когда вращение рабочего канала происходило в горизонтальной плоскости. Устройство Баркера, описанное во втором томе «Курса экспериментальной физики» Т. Дезагюлье, состояло из горизонтального желоба, с патрубками, перпендикулярными основному каналу. Желоб вращался около вертикальной оси за счет реактивного действия двух струй, выливающихся в противоположных направлениях из патрубков. Вода поступала в канал сверху по трубе, идущей вдоль оси вращения.

Опуская другие эскизные проекты горизонтального водяного двигателя, изложим вкратце работы профессора Геттингенского университета А. Сегнера, в которых имеются расчеты водяного двигателя, чертежи к проекту для конструирования его гидравлической машины [1]. Самое интересное в этой истории то, что проект сегнеровой турбины был технически реализован. Мукомольная мельница в Нертене вблизи Геттингена, приводимая в движение двигателем Сегнера, безотказно работала долгие годы.

Схема колеса Сегнера близка по существу к двигателю Баркера.

От цилиндра с водой, вращающегося около его вертикальной оси симметрии, отходили радиально в горизонтальной плоскости трубки, из боковых отверстий которых вытекала в одном направлении вода. Так создавался реактивный момент вращения всей машины около вертикальной оси. Реакция вытекающей из трубок воды приводила весь агрегат во вращение в сторону, противоположную истечению воды. Сегнер объяснял, какие преимущества имеет его гидравлическая машина по сравнению с ранее известными водяными колесами.

Познакомившись с изобретением Сегнера, Эйлер дал ему высокую оценку и проявил большой интерес к этому проекту. На протяжении нескольких лет Эйлер разработал и опубликовал четыре обширных исследования, посвященных усовершенствованию проекта горизонтального колеса Сегнера. Три мемуара были опубликованы в академических изданиях Берлина, четвертый помещен в «Новых комментариях Петербургской Академии наук», пятый мемуар был опубликован в «Opera postuma» в Петербурге в 1862 г. ([2], [3], [4], [5]) посмертно.

В первом из перечисленных мемуаров, оконченных Эйлером в 1750 г. [2], рассматривается проект Сегнера и предлагается ряд усовершенствований к нему,

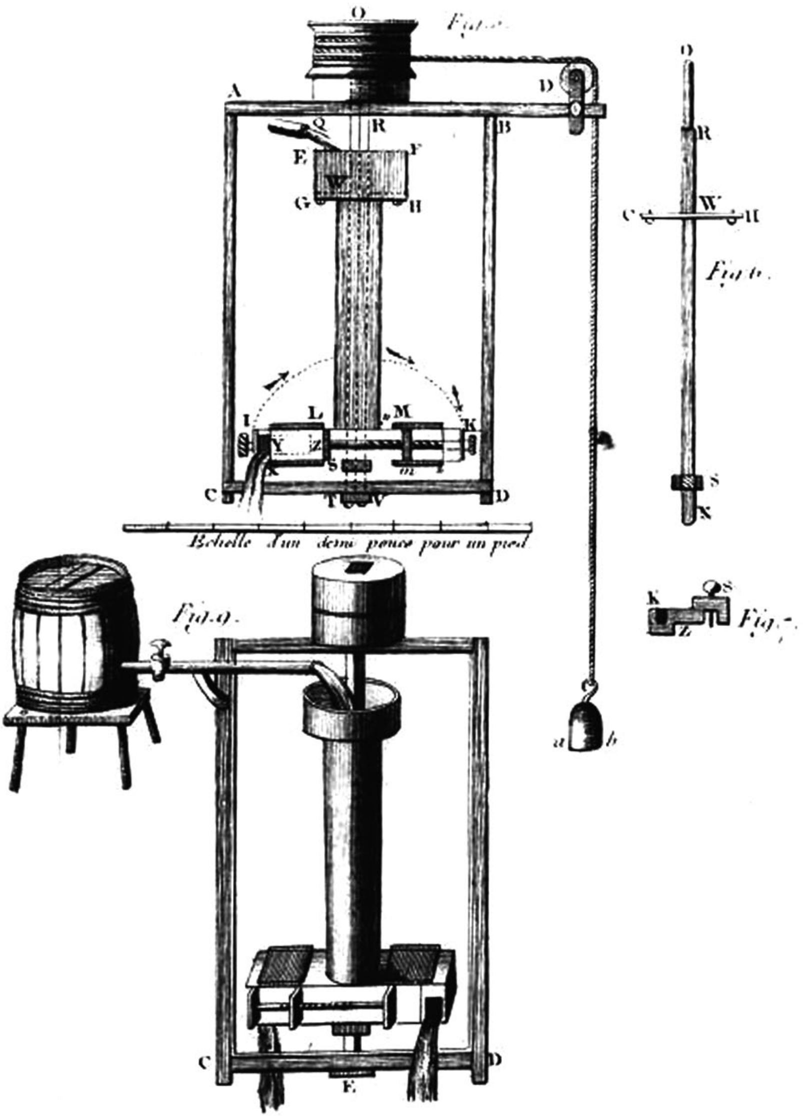


Рис. 1. Модель Баркера

например, вместо прямых радиальных трубок с боковыми выходными отверстиями Эйлер предложил ввести изогнутые в горизонтальной плоскости трубки, по которым течение воды **плавно** изменяло бы свое направление; это уменьшало бы вредные потери энергии струи. Эйлер проводит расчет величины вращающего реактивного момента; затем определяет мощность (l'effet) машины, или произведение веса груза на высоту, на которую могла бы поднять этот груз турбина в единицу времени. Только в начале XIX в. такие гидравлические машины стали внедряться в технике, например, во Франции Манури Декто построил около 40 горизонтальных водяных колес типа Сегнера, в которых трубки рабочих каналов были криволинейными. Эти гидравлические двигатели работали с большим успехом и заслужили весьма лестный отзыв Л. Карно [6].

Важнейшим итогом в теории действия водяной реактивной турбины стало исследование Эйлера [4], опубликованное в Берлине в 1756 г.: «Наиболее полная теория машин, которые приводятся в движение реакцией воды». Здесь дана теория и, как ее результат, проект турбины Эйлера. В отличие от всех предшествующих проектов таких машин турбина Эйлера состояла из двух основных агрегатов: направляющего аппарата и рабочего колеса, вращающегося около вертикальной оси. Последнее состояло из многих криволинейных трубок, жестко скрепленных с кожухом, который был отшлифован для уменьшения сопротивления воздуха. Он имел форму усеченного конуса, симметричного относительно оси вращения. Такая конструкция рабочего колеса была существенной модификацией устройства машины Сегнера. Оригинальным изобретением, основанным на расчете Эйлера, было введение **направляющего аппарата** вместо вертикального слива воды из желоба в рабочее колесо. Вертикальный поток воды разбрызгивался и затормаживал вращение рабочего колеса, увеличивая потери мощности. Направляющий аппарат Эйлера подавал струи воды в рабочие каналы с той же скоростью (по величине и направлению), которая имелась на входе в канал при установившемся режиме. Таким образом, присоединение элемента жидкости к рабочему колесу происходило **безударно**.

Направляющий аппарат состоял из ряда трубок, расположенных на поверхности неподвижного цилиндрического резервуара с водой. Высота и наклон трубок по отношению к вертикали обеспечивали достижение необходимой скорости безударной «посадки» капли в подвижный канал. Этот резервуар располагался соосно с рабочим колесом и выше последнего. Схема турбины Эйлера дана по его чертежу на рис. 2.

В работах [3], [4] Эйлер ставит и решает **общую задачу** одномерного неустановившегося движения идеальной жидкости внутри подвижной гладкой трубки. В этом подходе намечен метод вывода знаменитых уравнений гидродинамики Эйлера. Он ввел перепад гидродинамического давления жидкости на элементарном перемещении частицы (частная производная давления по длине дуги).

Принцип, из которого выводится уравнение движения турбины Эйлера (движение по трубкам считается одномерным, жидкость идеальная), состоит в равенстве момента «требуемых сил» (в современной терминологии, производной по времени от момента количества движения рабочего колеса относительно оси его симметрии) моменту сил реакции протекающей по рабочим каналам воды. Момент силы тяжести воды относительно вертикальной оси равен нулю. Отметим, что три общие теоремы динамики системы еще не были сформулированы.

Эйлер находит трансверсальную составляющую количества движения элемента воды между двумя смежными поперечными сечениями рабочего канала. Выражение состоит из трех слагаемых: трансверсальная составляющая относительного ускорения «капли» в рабочем канале, плюс составляющая переносного ускорения за счет вращения колеса, плюс называемое так с XIX в. кориолисово ускорение частицы в сложном движении; сумма умножается на массу элемента жидкости — dm.

Эйлер проводит преобразование найденного выражения, умножая его на радиус (расстояние) частицы относительно оси вращения, интегрирует по всей длине рабочего канала и получает величину реактивного момента M турбины.

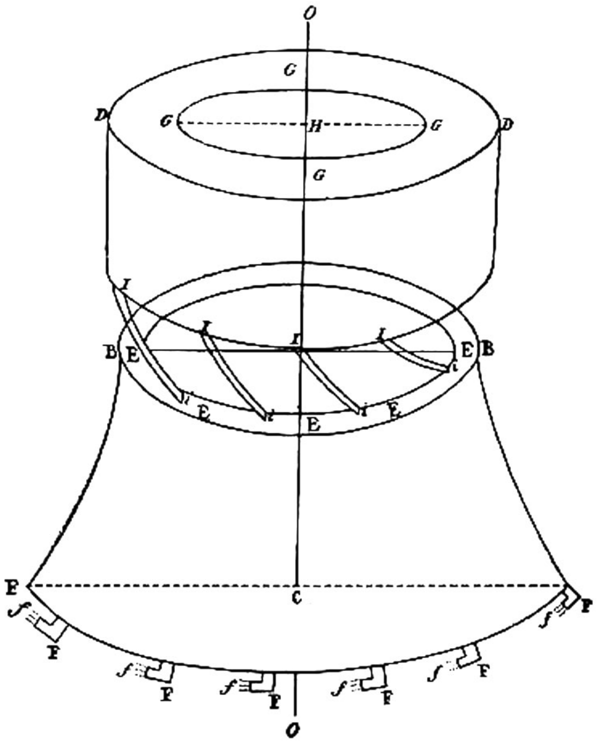


Рис. 2. Модель турбины Л. Эйлера

Для установившегося режима угловые ускорения вращения колеса и относительного движения «капли» равны нулю. Выражение момента сил реакции становится двучленным [7, с. 43, 44].

Более десяти разделов (они называются «Проблемами») сочинения Эйлера [4] посвящены решению конкретных технических вопросов. Эйлер определяет силы реакции воды на подвижную трубку (для каждого сечения), вычисляет размеры частей турбины при заданных секундном расходе воды и высоте ее падения; в одиннадцатом разделе определяется эффект (мощность) турбины по известному моменту сил реакции путем умножения его на величину угловой скорости колеса. Если дана величина груза *S*, поднимаемого за счет вращения турбины, известны плечо подвески и высота подъема груза, то мощность турбины равна произведению этих трех величин.

В следующем, двенадцатом разделе исследуется вопрос о параметрах конструкции машины, необходимых для достижения наибольшей мощности. Еще одним важным в инженерном отношении выводом Эйлера было требование равенства нулю абсолютной скорости частицы на выходе из рабочего канала. Именно это требование было необходимым условием максимальной мощности двигателя.

Теоретические исследования Эйлера о действии водяной турбины опередили практику использования подобных аппаратов на три четверти столетия: только в конце первой трети XIX в стали применяться ранние промышленные турбины — Манури Декто, Вейтлау, Бюрдена, позже Фурнейрона, И. Сафонова в России.

Однако и эти знаменитые водяные турбины уступали по интенсивности и широте применения паровым двигателям, коэффициент полезного действия которых был вдвое, а в некоторых моделях втрое меньше по сравнению с упомянутыми турбинами. Дело в том, что «паровички» были удобны в применении и к мелким хозяйствам, и в фабрично-заводских условиях, и даже на транспорте (паровозы, пароходы). В то же время, водяные турбины были тесно связаны с источником водной энергии (река), а это требовало иногда дальней перевозки обрабатываемого машиной сырья к месту постановки турбины.

Новый этап в применении водяных (а затем и паровых) турбин как универсальных двигателей наступил в конце XIX века в связи с введением электропередачи на большие расстояния. До этого открытия турбина развивала непомерно большие обороты (В. Понселе с сожалением отмечал это), передаточные механизмы понижали скорости, при этом происходили большие потери мощности двигателя. Теперь же большие скорости вращения рабочего колеса стали полезными. На основе новых запросов техники турбостроения возникала новая аналитическая теория турбин.

Среди ученых, развивавших это направление, были как европейские ученые, например, Г. А. Цейнер, Ф. Пражиль, А. Стодола, так и отечественные — Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин, Г. Ф. Проскура. В новых исследованиях принципиальный подход к задаче о движении турбины был весьма близким к методу Эйлера. Основным отличием аналитической теории действия турбины от способа, примененного самим Эйлером, являлось то, что течение в рабочем канале рассматривалось как трехмерное (вместо одномерного). При этом исходными уравнениями в теории турбомашин XX в. стали общеизвестные гидродинамические уравнения Эйлера, выведенные им в 1755 г., в период его работы по совершенствованию сегнерова колеса.

В конце XIX в. стали появляться обзоры работ Л. Эйлера по теории гидравлического двигателя. Одним из первых специалистов по теории турбин, высоко оценивших изложенные выше исследования Эйлера, был Г. Цейнер [8, с. 150]. Он считал, что расчетные формулы Эйлера в теории турбин годятся и в настоящее время.

В середине XX в. к двухсотлетию разработки Эйлером теории и проекта гидрореактивной турбины швейцарские ученые решили построить модель турбины Эйлера по его проекту. Модель турбины, построенная в 1943 г. фирмой Эшер–Висс по непосредственному описанию и расчетам Эйлера, имела входной диаметр 20 см и выходной — 30 см; она работала при напоре воды в 1 м и при расходе 19,7 л/сек. Испытание аппарата подробно описано Аккеретом в 1944 г. Максимальный коэффициент полезного действия модели равнялся 71,2%, т. е. был выше, чем у первых турбин начала XIX в. (турбина Бюрдена имела коэффициент полезного действия 67%).

К началу XVIII в. проблемы мореплавания и судостроения привлекали внимание ученых и инженеров. К этому времени флот имел два типа судового движителя: весла и парус. В 1753 г. Парижская королевская Академия наук объявила конкурс на изыскание лучшего корабельного движителя.

На этом конкурсе получила премию работа Д. Бернулли [9], серьезная погрешность в которой не была замечена. Этот результат Бернулли подробно описал в знаменитом трактате «Гидродинамика» (в тринадцатом разделе).

На конкурсе Парижской академии похвальный отзыв получила работа Л. Эйлера «О приведении в движение кораблей без силы ветра» [10]. Второй раздел статьи называется «О силах, происходящих от реакции воды», где сказано: «Пока вода в каком-нибудь сосуде покоится, силы давления на стенки сосуда взаимно уравновешиваются и не побуждают сосуд к движению. Если же вода в сосуде движется, истекая через какое-нибудь его отверстие, то в таком случае равновесие нарушается, и сосуд побуждается к движению силой, которая действует на сосуд и называется силой реакции. Эта сила, очевидно, пригодна для приведения кораблей в движение» [10, с. 24].

Принцип составления уравнения движения судна с реактивным движителем аналогичен способу составления уравнения движения турбины. Сумма «требуемых» сил, или произведений масс частиц воды на их ускорения, в проекции на горизонтальную ось (скорости движения судна), равна сумме проекций всех активных сил и силы реакции водометного движителя на ту же ось. Рассматривая схему рабочего канала, Эйлер тем же способом, как и в случае турбины, выводит выражение для реактивной силы элемента воды в рабочем канале. Чтобы получить величину полной силы реакции, действующей на изогнутую трубку, Эйлер проводит интегрирование элементарных сил по всей длине трубки. Для установившегося режима сила реакции водометного движителя равна произведению секундного расхода жидкости в некотором сечении трубки (эта величина равна производной массы по времени) на относительную скорость течения жидкости и на разность синусов углов этой скорости с вертикалью на выходном и входном сечениях. Заметим, что в XX в. стала широко применяться формула Мещерского для реактивной силы при поступательном движении тела переменной массы (или состава частиц): произведение относительной скорости отделяющихся или присоединяющихся частиц на производную массы по времени. Очевидно, в общей динамике тел переменной массы уравнение Мещерского (1897) включает, как частный случай, и уравнение равномерного поступательного движения водометного судна, по Эйлеру. Это уравнение получается, если произведение массы судна на его ускорение приравнять величине реактивной силы, по Эйлеру. Более подробно об этом и о дальнейшем развитии теории и практики использования водометных судов до середины XX в. рассказано в работе [11].

Исследуя вопрос о наилучшей форме рабочего канала водометного движителя, Эйлер заметил, что наивыгоднейшей формой трубы будет та, при которой синус угла между направлением скорости воды на выходе и вертикалью равен единице, а для входного сечения — минус единице. Исходя из этого расчета, Эйлер предлагает схему устройства водометного судового движителя. Более поздние судостроители, не зная работы Эйлера, заново создали аналогичный проект реактивного судового движителя. Например, спустя столетие совершенно такой же, как в работе Эйлера, проект был предложен российским специалистом А. К. Эшлиманом [12] в статье «О движении пароходов силой реакции» в 1868 г. Паровой двигатель приводил в движение поршень, а движитель был совершенно таким же, как его предложил Эйлер в середине XVIII в. О работах Л. Эйлера Эшлиман не упоминает, видимо, он их не знал.

Ничего не знал о работах Эйлера и известный отечественный механик И. В. Мещерский. В 1897 г. Мещерский защитил в Петербурге магистерскую диссертацию «Динамика точки переменной массы». И в начале XX в. И. В. Мещерский продолжал разработку названной темы. Он предложил проект гидрореактивного судна [13, с. 249]. Результаты Мещерского подтверждали справедливость исследований Эйлера. На протяжении XX в. не только историки механики, но и авторы популярных учебников для высших учебных заведений приводили в пример проект гидрореактивного судового движителя. Например, в учебном пособии для студентов Московского физико-технического института «Классическая механика» М. А. Айзермана прекрасно изложена, в современной терминологии и в векторной форме, динамика тел переменного состава [14, с. 105–116], с прямыми ссылками на результаты вышеизложенных работ Л. Эйлера [14, с. 109]. Отметим, что лекторов такого высокого класса, знающих работы основоположников фундаментальных наук, можно встретить не только в Московском, Санкт-Петербургском, Пермском университетах, но и в лучших технических вузах, многие из которых стали называть себя техническими университетами.

Литература:

1. *Segner J. A.* Beschreibung einer von Segner erfundungen hydraulique Maschinen // Hannoverische Gelehrte Anzeigen. 1750. № 35. S. 38.

2. *Euler L.* Recherches sur l’effet d’une machine hydraulique proposée par Mr. Segner // Histoire et mémoires de l’Acad. de Sci. de Berlin. 1752. P. 311.

3. *Euler L.* Application de la machine hydraulique de M. Segner // Ibid., 1753. P. 271–304.

4. *Euler L.* Théorie plus compléte des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l’eau // Ibid., 1756. P. 227–295.

5. *Euler L.* De motu et reactiones aquae per tubos mobiles transfluentis // N. Comm. 1761. P. 312.

6. *Carnot L.* Sur diverses machines hydrauliques // Journ. des mines. Paris, 1813. Vol. 33. № 193. P. 39.

7. *Тюлина И. А.* О работах Л. Эйлера по теории гидрореактивного судна и водяной турбины // ВИИЕТ. М., 1957. Вып. 4. С. 34–46.

8. *Zeiner G.* Vorlesungen über Theorie der Turbinen. Leipzig, 1899.

9. *Bernoulli D.* Recherches sur la manier la plus avantageuse de supléer à l’action du vent sur les grands vaisseaux // Recuiel des pièces qui ont remporté le prix de l’Académie Royale des Sciences. T. 7. Paris, 1769.

10. *Euler L.* Mémoir sur la manier la plus avantageuse… // Ibid. T. 8. Paris, 1771. P. 24.

11. *Тюлина И. А.* Из истории водометного движителя // ВИИЕТ. М., 1961. Вып. 11. С. 107–116.

12. *Эшлиман А. К.* О движении судов силою реакции // Морской сборник. 1868. № 7. С. 8.

13. *Мещерский И. В.* Реактивное судно // Работы по механике тел переменной массы. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. С. 249–251.

14. *Айзерман М. А.* Классическая механика. М.: Наука, 1974. С. 103–116.

К. В. Холшевников
Санкт-Петербург, Россия

Эйлер как астроном

Abstract: Leonard Euler as an observer and a theorist made an invaluable contribution to all domains of the astronomy of his time: astrometry, geodetic and nautical astronomy, tides theory, astrophysics (sunspots, aurora, zodiacal light, comet tails, atmospheres of planets and the Moon). As to celestial mechanics, his contribution was fundamental. It is no exaggeration to say that all branches of celestial mechanics lie on the foundations laid by Euler. We describe here his main contribution to astronomy with special attention to celestial mechanics.

Леонард Эйлер представляет собой явление исключительное. Полное собрание его сочинений приближается к ста томам. Ничего подобного нет ни у одного корифея точных наук. Свыше 10 томов посвящено астрономии. Только П. С. Лаплас может предъявить подобное. Можно назвать лишь одного человека за всю историю человечества, кто мог бы затмить Эйлера-астронома: это — Эйлер-математик.

Безусловно, основным полем его астрономической деятельности была небесная механика, куда он внес основополагающий вклад, придав ей современную аналитическую форму. Без преувеличения можно сказать, что все ее разделы, за исключением релятивистского, покоятся на возведенном Эйлером фундаменте. Более того, многие разделы теоретической механики были созданы Эйлером для нужд механики небесной: например, теория движения твердого тела относительно центра масс возникла из задачи о вращательном движении пары Земля – Луна.

Но Эйлер оставил след во всех областях современной ему астрономии: в астрометрии, геодезической и морской астрономии, теории приливов, бывшей еще в зародыше астрофизике. Мы лишь коснемся этих вопросов, уделяя основное внимание небесной механике. Дополнительные сведения можно почерпнуть из приводимой в конце литературы [1]–[9].

Геодезическая и морская астрономия, астрометрия, элементы астрофизики

Эйлер, как и почти все члены математического класса Петербургской Академии наук, принимал регулярное участие в наблюдениях на Академической обсерватории, помещавшейся в здании Кунсткамеры. Он не стал выдающимся наблюдателем, но систематические наблюдения прохождений звезд и Солнца через меридиан, покрытий звезд и планет (особенно Венеры) Луной, солнечных и лунных затмений дали ему богатый материал для размышлений и, главное, в сильной степени развили астрономическую интуицию. По утверждению С. И. Вавилова [1, с. 144], математическому гению Эйлера явно «не хватало физической интуиции», поэтому математик подавлял в нем физика. Про Эйлера-астронома так сказать нельзя. В его трудах ощущается глубокая астрономическая интуиция и профессионализм.

Приведем лишь несколько примеров. Прибегая к рядам для вычисления эфемерид небесных тел, Эйлер никогда не выписывал лишних членов. Всегда тщательно следил за точностью. Отыскивал переменные, в которых сходимость разложений ускоряется. Эйлер-математик непринужденно использовал расходящиеся ряды. Эйлер-астроном требовал быстрой сходимости.

Теория поступательного движения Луны содержит шесть произвольных постоянных[1]. Эйлер оставил их восемь, не успев найти две связи между ними (позднее это удалось Дж. У. Хиллу). Но, понимая огромную важность лунной теории для нужд морского флота, Эйлер-практик решился взять значения двух величин «прямо с неба» (по его же выражению), на что чистый математик никогда бы не отважился. «С неба» означает здесь, что средние движения перигея и узла[2] были взяты непосредственно из астрономических наблюдений.

Основной вклад Эйлера в геодезию и навигационную астрономию состоял в построении максимально точной теории движения Луны и галилеевых спутников Юпитера. Напомним, что для определения долготы необходимо в один и тот же момент знать местное время и время на фиксированном меридиане (например, Гринвичском). До изобретения радио надежным способом определения Гринвичского времени служили наблюдения близких небесных тел, обладающих быстрым движением. Подробнее об этом рассказано ниже. А здесь заметим, что Эйлеру принадлежит вывод алгоритмов обработки наблюдений Солнца, Луны, планет и звезд, позволяющий определить время их прохождения через меридиан; завершение теории параллакса и аберрации света; вывод дифференциального уравнения рефракции света в атмосфере.

В первой половине XVIII века астрономы Петербургской и Парижской астрономических школ, связующим звеном которых был глава первой из них Ж. Н. Делиль, активно занимались вопросами, относящимися теперь к астрофизике. Они исследовали солнечные пятна, полярные сияния в верхней атмосфере Земли, зодиакальный свет, хвосты комет. Несколько важных публикаций принадлежат Эйлеру. Конечно, выяснить физическую природу соответствующих процессов удалось лишь значительно позднее. Но уже тогда была понята связь явлений и фундаментальная роль солнечной активности (коррелирующая с числом и размером солнечных пятен). И хвосты комет, и полярные сияния вызываются идущим от Солнца светом и дополнительным агентом, связанным с пятнами. В конце XX века он назван солнечным ветром.

Открытия Галилея показали, что Земля, Луна, планеты похожи. Но насколько? Важнейшим вопросом, по которому проводились специальные наблюдения, ставились эксперименты и велись жаркие дискуссии, был вопрос о наличии атмосфер у Луны и планет. В 1715 г. парижские астрономы наблюдали покрытие Венеры Луной с целью уточнения астрономических постоянных и элементов орбит Венеры и Луны. И отметили изменение цвета Венеры в моменты контактов с Луной. Причиной могли быть дефекты оптики телескопов, или наличие искажающей изображение атмосферы Луны или Венеры. В 1729 г. в Петербурге проводились специальные наблюдения очередного покрытия Венеры Луной, чтобы выяснить, обладают ли эти небесные тела атмосферами или нет. Эйлер принимал активное участие в подготовке программы наблюдений, и даже предложил свою модель атмосферы планет. Наблюдения показали отсутствие выраженных цветовых эффектов, но выявили слабое дрожание изображения в моменты контактов. И Эйлер склоняется к мысли о наличии разреженной атмосферы у Луны и, возможно, Венеры. Окончательно вопрос был решен позднее, но астрономическая задача была поставлена в Петербурге при активном участии Эйлера.

Небесная механика

Главной задачей небесной механики XVIII века оставалось описание движения в задаче N тел, точнее, точек, притягивающих друг друга по закону всемирного тяготения. Согласно последнему, ускорения гравитирующих точек прямо пропорциональны массам и обратно пропорциональны квадрату расстояния. Таким образом, связанными одним уравнением оказываются положения, скорости и ускорения точек. Подобные уравнения называют дифференциальными, а процесс их решения — интегрированием. Название это довольно условно, поскольку лишь в простейших случаях решение сводится к интегралам от известных функций или, как принято говорить кратко, к квадратурам. Дифференциальные уравнения в задаче N тел вывел И. Ньютон. Его геометрические построения представляют собой доведенный до совершенства метод античной математики, восходящий к Архимеду. Овладеть им может лишь изощренный ум. При N=2 Ньютону удалось решить задачу. Но при произвольном N таким путем невозможно было продвинуться сколько-нибудь далеко.

Современную координатную форму, язык аналитических функций вместо языка треугольников, параллелограммов и окружностей, небесная механика приняла в работах Леонарда Эйлера.

Задача двух тел

Даже сейчас изредка появляются работы, открывающие что-то новое в исследованной вдоль и поперек задаче двух тел. В XVIII веке это была актуальнейшая задача астрономии.

Неоценимы заслуги Эйлера, создавшего аналитический метод записи и интегрирования дифференциальных уравнений задачи двух тел, доступный каждому студенту. В результате координаты и скорости представляются простыми функциями от масс двух тел, 12 постоянных интегрирования, т. е. от начальных положений и скоростей и вспомогательной переменной — введенной еще И. Кеплером эксцентрической аномалии. 6 из 12 постоянных описывают прямолинейное и равномерное движение центра масс, 5 определяют геометрию орбиты, последняя — положение на орбите в заранее фиксированную эпоху.

Эксцентрическая аномалия и время связаны трансцендентным уравнением. Численное его решение не представляет существенных сложностей. Однако при определении орбит из наблюдений, для описания возмущенного другими небесными телами движения и в других задачах астрономии нужно знать положения небесных тел в виде явных функций времени. Этого можно добиться, разлагая соответствующие функции от эксцентрической аномалии в ряды того или иного вида. В случае периодического движения по эллипсу лучший вид разложений — ряд Фурье по косинусам и синусам кратных средней аномалии. Так назван растущий пропорционально времени угол, который делает полный оборот в 360° за период обращения двух тел друг относительно друга. Странное наименование «аномалия» восходит еще к древнегреческой школе Гиппарха и Птолемея. Уже в их эпициклической теории аномалиями назывались углы, считаемые от перицентра, т. е. ближайшей к притягивающему центру точки орбиты.

Эйлер нашел адекватный вид ряда и определил общий член для большинства известных к настоящему времени разложений Фурье основных функций задачи двух тел. Кстати, Ж. Фурье к этому времени еще не родился, а его публикация «ряда Фурье» относится к 1822 г.

Для фактического построения разложений Эйлер использовал открытую им связь показательной и тригонометрических функций в комплексной области. Именно с этого момента ведет начало теория функций комплексной переменной, обслуживавшая вначале лишь нужды небесной механики, а сейчас лежащая в фундаменте математики и теоретической физики.

Подавляющее большинство разложений небесной механики сходится тем быстрее, чем меньше эксцентриситет e. В самом деле, при движении по окружности e=0 уравнение Кеплера тривиально, угловая координата растет пропорционально времени.

Эйлер обратил внимание на важность разложений для близпараболического движения, когда заранее неизвестно, является ли оно гиперболическим или эллиптическим. Немало комет описывает подобные траектории. Эйлер первым в 1743 г. ввел в астрономическую практику разложения по степеням

$$s = (1-e)/(1+e),$$

найдя в важнейших случаях общий член. Между прочим, для разложений по степеням $1-e$ не удается получить компактного выражения общего члена. Переход же к переменной s — нетривиальный прием, ведущий к успеху.

Отметим любопытный факт. Киевские астрономы, вычисляя кометные орбиты, столкнулись с необходимостью использовать эксцентриситетные разложения при e, близких к единице. Результаты Эйлера 1743 г. были уже основательно забыты. Их переоткрыл и опубликовал в 1930 г. в Astronomische Nachrichten киевский астроном Иван Игнатьевич Ильинский (1887–1968). Они приводятся (как принадлежащие Ильинскому) П. Штумпфом в первом томе его учебника [2] без ссылки на Эйлера.

В XVIII веке систематически открываются новые кометы. Определение их орбит становится стандартной задачей и требует стандартного решения. Достаточно ограничиться невозмущенным движением: траекторию необходимо вычислить быстро, а за короткое время возмущения не успевают накопиться. Определить орбиту нового небесного тела по положению и скорости не составляет труда. Но вплоть до второй половины XX века наблюдения давали только направления на объект с движущейся Земли. А при таких условиях задача оказалась более чем серьезной даже для Эйлера. Полного решения он не построил, хотя и продвинулся гораздо дальше, чем все его коллеги-современники. Им поставлено и решено множество модельных задач, таких, как определение орбиты по двум положениям и параметру конического сечения, по трем гелиоцентрическим направлениям. Открыто в параболическом случае соотношение, получившее позднее название формулы Эйлера–Ламберта. Решено достаточно и реальных задач, таких как определение параболических орбит по пяти наблюдениям, по четырем наблюдениям; определение орбиты кометы, дважды пересекающей плоскость эклиптики, и т. д.

Определение орбит по небольшому числу наблюдений — только первый шаг. Неизбежные приборные ошибки приводят к тому, что вычисленная астрономом траектория оказывается лишь первым приближением к действительной. Другим источником погрешности служат неучтенные вначале возмущающие факторы, в первую очередь притяжение больших планет. Стоит заметить, что задача определения первоначальной орбиты решается, как правило, один раз, задача же улучшения орбиты вечна. С течением времени техника наблюдений идет вперед, измерительные погрешности уменьшаются. Вдобавок растет дуга орбиты, охваченная наблюдениями, что само по себе увеличивает точность прогноза. Задачей улучшения орбит больших планет и Луны занимались до Эйлера уже четыре тысячи лет. Но из-за неразвитости математики общий метод отсутствовал. Для обработки подбиралась лишь небольшая часть наблюдений. Например, измеряемая в момент пересечения эклиптики долгота планеты непосредственно дает долготу одного из узлов. Ведь линия узлов по определению представляет собой линию пересечения плоскости орбиты с плоскостью эклиптики.

Эйлером дана математическая формулировка задачи улучшения орбит как в рамках задачи двух тел, так и с учетом возмущений. Каждое измерение приводит к одному уравнению, связывающему неизвестные элементы истинной орбиты и известные нам элементы приближенной орбиты. Именно, пусть в определенный момент наблюдается некоторая величина, например, склонение или прямое восхождение, известным образом выражающаяся через элементы. Разность между наблюденным и вычисленным значением указанной величины равна некоторому известному числу. Пользуясь близостью истинной орбиты к первоначальной, Эйлер заменяет разность дифференциалом и приходит к системе уравнений, линейных относительно поправок к элементам. Коэффициенты при поправках ему удалось вычислить с необходимой точностью. С этого времени астрономы получили возможность использовать всю совокупность наблюдений.

Пожалуй, можно назвать лишь одну проблему, касающуюся кеплерова движения, исследование которой началось уже после Эйлера: определение области сходимости основных разложений небесной механики.

Задача двух неподвижных центров

Дифференциальные уравнения, описывающие достаточно точно движение небесных тел, весьма сложны и не поддаются аналитическому интегрированию в конечном виде, т. е. без использования бесконечных рядов или эквивалентных им процедур. Практически все аналитические методы построения траекторий сводятся к расщеплению задачи на две части. Во-первых, дифференциальные уравнения движения упрощаются до такой степени, что их можно решить в замкнутой форме, не применяя слишком сложных функций. Решение упрощенных уравнений называют промежуточной орбитой. Во-вторых, находятся поправки, отклонения истинной орбиты от промежуточной. Эта задача легче первоначальной только в том случае, когда поправки малы и их определение можно свести к последовательности линейных процедур. Поэтому промежуточная орбита должна быть близка к истинной. Требования простоты промежуточной орбиты и ее близости к сложной истинной траектории настолько противоречивы, что до сего времени в небесной механике их найдено лишь около десятка. Исторически первая — кеплерова орбита. Точнее, решение задачи одного притягивающего центра, описывающее движение точки бесконечно-малой массы в ньютоновском поле тяготения неподвижной точки. Кроме собственно кеплеровых эллипсов здесь присутствуют гиперболы, параболы и прямолинейные траектории.

Задача двух тел элементарными преобразованиями сводится к задаче одного притягивающего центра. Следующей по сложности является не задача трех тел, даже ограниченная, а задача двух неподвижных центров. Она описывает движение точки бесконечно малой массы, притягивающейся к двум материальным точкам конечной массы, предполагаемым неподвижными, как бы прибитыми гвоздями к небу. Честь сведения общего решения к квадратурам принадлежит Эйлеру. Основные законы механики — сохранения энергии и момента импульса относительно соединяющей притягивающие центры прямой — дают два очевидных интеграла движения. Для отыскания решающего задачу третьего интеграла Эйлер записывает уравнения в различных координатах, надеясь найти такие, в которых переменные разделяются. Иными словами, для каждой из трех координат получается одно уравнение, не связанное с уравнениями для двух других переменных. В конце концов, Эйлер изобрел эллипсоидальные координаты, что и привело к успеху. Подробного исследования траекторий Эйлер проводить не стал после выяснения досадного обстоятельства, что движение в поле двух неподвижных центров не может служить адекватной моделью в задачах типа Солнце–Земля–Луна или Солнце–Юпитер–Сатурн.

В космическую эру обнаружена неожиданная область применения данной задачи, обобщенной на комплексные значения параметров: движение спутника несферической планеты. Естественно, движение точки в поле двух центров принято теперь называть эйлеровым.

Оскулирующие элементы

Основные заслуги петербургского академика в небесной механике связаны с интегрированием уравнений возмущенного движения. Центральное понятие небесной механики — оскулирующие элементы — впервые строго определено Эйлером. Оскулирующей (в переводе с латинского — целующей) он назвал кеплерову орбиту, имеющую в данное мгновение те же положение и скорость, что и истинная. Оскулирующая орбита меняется со временем, причем истинная траектория является огибающей семейства оскулирующих. Набор оскулирующих элементов определяет состояние динамической системы точно так же, как набор положений и скоростей. Но при малых возмущающих воздействиях — типичный в небесной механике случай — оскулирующая орбита меняется медленно. И в этом главное преимущество оскулирующих элементов перед обычными координатами и скоростями. Петербургскому академику принадлежит аналитический вывод соотношений, определяющих изменение оскулирующих элементов со временем, — дифференциальных уравнений Эйлера. С его именем связано становление теории возмущенного движения в оскулирующих элементах, как аналитической, так и численной. Сам Эйлер успешно применял аналитическую теорию к исследованию орбит Юпитера, Сатурна, Земли, Венеры и других небесных тел; численную — к кометным исследованиям.

Абстрактная задача трех тел и N тел

Математика XVIII века, во многом благодаря Эйлеру, находила решение все новых и новых классов дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения задачи N тел по виду ненамного сложнее уравнений задачи двух тел. Особенно при N=3, что соответствует простейшему, но важному для практики случаю. Ему отвечает, например, задача описания движения систем Солнце–Земля–Луна, Солнце–Юпитер–Сатурн, Солнце–Юпитер–комета, не говоря уже об открытых позднее системах тройных звезд. Эйлер многие годы пытался проинтегрировать задачу трех тел (естественно начать с простейшей после N=2). Но, несмотря на всю его гениальность, ему не удалось найти ни одного интеграла движения, не сводящегося к классическим. Наконец, Эйлер оставил безуспешные попытки и высказал предположение об отсутствии подобных интегралов, или, по крайней мере, об их практической бесполезности, если они все же существуют.

Во-первых, они должны быть столь сложными, что для их разрешения понадобятся не меньшие усилия, чем для прямого интегрирования. Напомним, что интегралом называется функция от времени, положений и скоростей движущихся точек, не меняющаяся вдоль траектории. Для его использования одну из входящих в интеграл переменных нужно выразить через остальные, что в общем случае само по себе представляет трудную проблему.

Прошло четверть тысячелетия, и сейчас в справедливости мысли Эйлера сомнений нет.

Во-вторых, заглянем в существо проблемы. Для чего вообще нужны интегралы? Для многих целей, конечно, но главное — для аналитического решения задачи, т. е. для отыскания формулы, позволяющей вычислить состояние x системы для любой эпохи t. В этом главное достоинство аналитических методов по сравнению с численными. Последние позволяют находить состояние системы лишь шаг за шагом, через небольшие промежутки времени, и к тому же для фиксированных начальных данных. Однако указанное преимущество на практике часто оказывается иллюзорным. Малейшая ошибка в начальных данных приводит к большим отклонениям при достаточно большом t. Эта мысль намного опередила эпоху, лозунгом которой был лапласов детерминизм, и стала общепринятой лишь в конце XIX века и даже позже, когда между классической и квантовой механикой перестали усматривать непроходимую пропасть.

Неинтегрируемость задачи трех тел стимулировала исследование ее частных случаев. Эйлером впервые были найдены точные частные решения. Подчеркнем, что речь идет об общей задаче трех тел с произвольными массами. Для ее частных случаев, скажем, при трех равных массах, многие частные решения очевидны по соображениям симметрии. Эйлером найдены прямолинейные решения задачи. В любую эпоху все массы расположены на одной прямой, сама же прямая равномерно вращается в пространстве вокруг перпендикулярной ей оси. Особо следует отметить указанные Эйлером положения относительного равновесия, называемые коллинеарными центрами либрации, когда все три точки неподвижны относительно упомянутой прямой. Эйлер обратил внимание, что коллинеарные центры либрации сохраняются и в ограниченной задаче, когда масса одной из точек бесконечно мала. Формально ее можно положить равной нулю. Парадокса с исчезновением гравитирующей и инертной массы не возникает: во внешнем гравитационном поле ускорение не зависит от массы притягиваемой точки. Изучение найденных частных решений позволило Эйлеру высказать плодотворную идею о разделении движений спутникового и планетного типа некоторой поверхностью, проходящей через точки либрации L_1 и L_2. Развитие этой идеи позднее привело к понятию гравитационных сфер (тяготения, действия, Хилла и др.), играющих значительную роль в небесной механике и астродинамике. Другая, возможно еще более важная, ветвь небесной механики обязана своим происхождением работам Эйлера по построению периодических орбит в окрестности точек либрации. Значение их было осознано в полной мере лишь после работ Дж. У. Хилла, А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре.

Теория движения Луны и теория движения галилеевых спутников Юпитера

Неоценим вклад Эйлера в разработку теории движения Луны и галилеевых спутников Юпитера. В то время описание их движения имело не только общенаучный интерес, но и отвечало острой практической потребности определения долготы корабля в море или долготы какого-либо удаленного от столицы города, например, Тобольска относительно нулевого меридиана, за который тогда принимали, в зависимости от обстоятельств, Гринвичский, Парижский или Потсдамский. Пулкова еще не существовало. Наблюдатель без особого труда мог установить местное звездное время, пользуясь навигационными приборами, фактически — маленькими телескопами, снабженными вспомогательными приспособлениями. Если же он знал и время на нулевом меридиане, то долгота как разность двух указанных времен оказывалась в его руках. Но достаточно точных хронометров тогда не было, так что проблема нахождения долготы сводилась к проблеме определения времени на нулевом меридиане. Сравнивая наблюденные и вычисленные по хорошей теории положения Луны относительно звезд, легко найти гринвичское время наблюдения. Луна из-за своей близости к Земле в один и тот же физический момент времени для разных наблюдателей занимает разные положения относительно звезд. Вплоть до того, что для одного наблюдателя она может быть левее Альдебарана, а для другого — правее. Но соответствующая поправка находится элементарно. Вместо Луны можно, конечно, использовать любую планету, но точность падает обратно пропорционально скорости движения небесного тела по небу. Так что, кроме Луны, помощь морякам могут оказать лишь быстро обращающиеся вокруг

Юпитера галилеевы спутники. Надо только засечь моменты таких явлений в их жизни, как затмения, покрытия или соединения. Именно поэтому высокоточной теории движения спутников требовали морские и картографические ведомства.

Лунная теория Эйлера опередила эпоху на 100 лет. В ней можно найти истоки современной теории нелинейных колебаний и метода осреднения. Теория эта заслуживает подробного рассмотрения. Но за недостатком места мы отсылаем читателя к комментированным переводам А. Н. Крылова [3] и к работам других авторов.

Заинтересовавшись движением пары Земля–Луна и галилеевых спутников Юпитера, Эйлер начал одновременно разрабатывать теорию гравитационного потенциала тел, близких к сферическим, и теорию движения свободного твердого тела. Причина понятна: Земля и Луна так близки, что их никак нельзя считать материальными точками. Еще более это относится к гиганту Юпитеру. Эйлер нашел разложение потенциала по шаровым функциям, до второго порядка относительно сжатия включительно, в общем случае и специально в случае эллипсоида. С соответствующей точностью были вычислены сила и момент силы притяжения, изменяющий вращательное движение. Применяя полученные им динамические и кинематические уравнения динамики твердого тела, Эйлер построил теорию прецессии и нутации земной оси. Предсказал свободные, возникающие и без воздействия Луны, колебания оси вращения Земли, открытые значительно позднее Чандлером.

Сжатие Земли приводит к ничтожным поправкам в движении Луны, чего нельзя сказать об Ио по отношению к Юпитеру. Во-первых, Ио гораздо ближе к Юпитеру, чем Луна к Земле (в радиусах центральной планеты). Во-вторых, Юпитер сжат значительно сильнее Земли. Занимаясь галилеевыми спутниками, Эйлер построил первую теорию движения спутников сжатых планет. Им были найдены вековые возмущения линии апсид и линии узлов. Можно перечислить не один десяток статей, появившихся перед и вскоре после запуска первых ИСЗ (искусственных спутников Земли), в которых были переоткрыты эти результаты Эйлера, причем вначале с меньшей точностью. С полным правом можно назвать петербургского академика создателем первых аналитических теорий движения ИСЗ.

Численные методы

Методом ломаных Эйлер заложил основы численных методов интегрирования дифференциальных уравнений небесной механики. Выше много говорилось о невозможности применения чисто аналитических методов для решения сильно возмущенных сложных уравнений. Численные же методы универсальны. Идея простейшего из них, метода ломаных, чрезвычайно прозрачна. Запишем уравнения движения в фазовом пространстве как связь f вектора состояния x и скорости его изменения dx/dt. В задаче о гелиоцентрическом движении восьми планет x представляет собой 48-мерный вектор, первые шесть компонент которого отвечают положению и скорости Меркурия, последние шесть — Нептуна. Функция f описывает притяжение планет к Солнцу и друг к другу. Пусть в начальную эпоху t=0 состояние системы $x(0)$ известно. Выберем единицу времени так, чтобы на единичном интервале движение хорошо приближалось прямолинейным равномерным (для планет — порядка суток). Тогда состояние $x(1)$ аппроксимируется суммой $x+dx/dt$, вычисленной для $t=0$. Повторяя процесс, получим состояние системы в произвольный момент $t=k$ как сумму векторов x и dx/dt, определенных в предыдущий момент $t=k-1$. Связь f необходима для вычисления скорости изменения состояния по самому состоянию. График движения — ломаная линия, откуда и название метода. Как было показано уже в XIX веке, метод ломаных Эйлера за счет выбора шага может представить истинное движение с произвольной степенью точности.

Эйлер не ограничился разработкой простейшего метода. Гораздо более точное приближение, по сравнению с равномерным прямолинейным движением на единичном интервале, может быть представлено отрезком ряда по степеням времени. Вопрос заключается в вычислении коэффициентов разложения, для чего изобретено много способов. Эйлер выразил искомые коэффициенты явно, используя некоторый дифференциальный оператор D, позднее получивший название оператора дифференцирования вдоль траектории. Степенной ряд, коэффициенты которого выражены с помощью оператора D, называют рядом Ли по имени норвежского математика, тщательно изучившего его свойства. Справедливее было бы называть его рядом Эйлера–Ли. С 1966 г., после пионерской работы японского астронома Г. Хори и почти одновременно появившейся статьи американца бельгийского происхождения А. Депри, важнейшим методом аналитической небесной механики становится метод преобразований Ли, базирующийся на ряде Эйлера–Ли.

Определение массы кометы Галлея

Определение масс комет представляло животрепещущую задачу астрономии XVIII века. Еще Ж. Бюффон, основываясь на гигантских размерах комет, полагал их массы сравнимыми с солнечной. Для определения массы кометы Галлея Эйлер вычислил возмущения орбиты Земли под действием близкого прохождения кометы в апреле – мае 1759 г. Аналитические методы здесь бессильны. Эйлер обратился к своим уравнениям, описывающим изменения оскулирующих элементов Земли. Он проинтегрировал их развитым им методом ломаных, ограничившись промежутком времени плюс минус месяц от эпохи наибольшего сближения с кометой. Масса кометы m была положена равной массе Земли, ее орбита считалась эллипсом, наилучшим образом удовлетворяющим наблюдениям. Последнее допущение означает, что в движении Земли находятся возмущения первого порядка относительно m, т. е. величиной m^2 пренебрегается.

Пропорциональность возмущений первого порядка величине m позволяет определить массу кометы сопоставлением вычисленных и наблюденных изменений элементов земной орбиты. Эйлер нашел изменения всех элементов. Мы процитируем наиболее впечатляющий отрывок из его сочинения [4]: «...Если комета равна Земле [по массе], год увеличится на 27 минут... Но тем более, если комета превысит Землю в 100 раз, год увеличится на 45 часов...». Наблюдения не показали никаких изменений в движении Земли и, в частности, в продолжительности года. Таким образом Эйлером установлено, что массы комет на несколько порядков меньше планетарных.

Антропный принцип

Собственно, он относится ко всем естественным наукам и философии, а не только к астрономии, но почему бы не сказать о нем в астрономическом разделе? Антропный принцип высказан явно во второй половине XX века: факт существования наблюдаемых объектов и самого наблюдателя накладывает серьезные ограничения на возможный спектр законов природы и их реализацию. Однако, пусть в менее четкой форме, окрашенный в духе времени в религиозные тона антропный принцип можно найти у Эйлера. Так, он ставит вопрос, что произошло бы, если бы Луна «была создана» на орбите, значительно более близкой или значительно более далекой. В первом случае она вызвала бы сильнейшие приливы, смертельно опасные для человечества. Во втором случае, под действием солнечных возмущений, Луна в конце концов покинула бы Землю. Если бы Эйлер варьировал и наклон лунной орбиты к эклиптике до значения, близкого к 90°, он неминуемо пришел бы к выводу о падении такой Луны на Землю, сделанному М. Л. Лидовым [10] в 1961 г.

Итак, наблюдатели не могут видеть Луну на орбите, сильно отличной от существующей ныне. Это — явно выраженный антропный принцип.

Закончим этот очерк таким резюме. Рука Эйлера чувствуется во всех разделах современной ему астрономии. Что же касается небесной механики, то она им практически создана. Корни аналитической, численной, качественной и прикладной небесной механики — в трудах Леонарда Эйлера.

Примечания:

[1] Поступательное движение Луны описывается системой дифференциальных уравнений шестого порядка, поэтому математическое описание движения Луны содержит шесть произвольных постоянных.

[2] Средними движениями в астрономии по древней традиции называют скорости изменения соответствующих углов — в данном случае угла между направлениями из центра Земли на точку весеннего равноденствия и восходящий узел лунной орбиты на эклиптике, и угла между направлениями на восходящий узел и перигей.

Литература:

1. *Вавилов С. И.* Физическая оптика Леонарда Эйлера // Собр. соч. Т. 1. М., 1956. С. 138–147.

2. *Stumpff K.* Himmelsmechanik. Bd. 1. Berlin, 1959.

3. *Эйлер Л.* Новая теория движения Луны / Пер. с лат. с примеч. и поясн. акад. А. Н. Крылова. Л., 1934.

4. *Euler L.* Astronomia mechanica: Digressio, qua effectus cometae A. 1759 expectati in motu Terrae perturbando investigatur // OP. Petropoli, 1862. Vol. 2. P. 294–316.

5. *Субботин М. Ф.* Астрономические работы Леонарда Эйлера // Леонард Эйлер. М., 1958. С. 268–376.

6. *Абалакин В. К., Гребеников В. А.* Леонард Эйлер и развитие астрономии в России // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 237–253.

7. *Невская Н. И., Холшевников К. В.* Эйлер и развитие небесной механики // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 254–258.

8. *Невская Н. И.* Новые данные о становлении Л. Эйлера как астронома и историка науки // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 259–276.

9. *Холшевников К. В.* Небесная механика // История астрономии в России и СССР / Под ред. акад. В. В. Соболева. М., 1999. С. 78–132.

10. *Лидов М. Л.* Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли. 1961. Вып. 8. С. 5–45.

М. И. Юркина, С. А. Толчельникова
Москва, Санкт-Петербург

Леонард Эйлер и изучение вращения Земли

Abstract: After Newton, Euler developed the dynamics of rigid bodies in general and in application to several planets. Attention is paid to Euler's studies of rotation of the Earth's axes in space (relative to the celestial coordinate system) and to his prediction of polar motion. The influence of polar motion to the fluctuations of observed latitudes was found in more than hundred years after Euler's prediction. In XX century different International services have been organized for monitoring latitudes φ and longitudes λ of the observatories. Deviations from Euler's value for the period of free polar motion are under discussion up to now. Euler's ideas are shown to be helpful to modern geodesists and astronomers for consolidation of their efforts.

Швейцарское Общество естествоиспытателей предприняло издание полного собрания трудов Леонарда Эйлера. Серия IV является собранием переписки Эйлера, изданной при участии АН СССР. «Вступление» на русском и немецком языках в Томе I этой серии подписано президентом АН СССР М. В. Келдышем и президентом упомянутого общества Швейцарии П. Губером. В нем есть такие слова: «...это издание... будет вдохновлять к новым открытиям современных исследователей в области чистой и прикладной математики, приобщая их к идеям одного из величайших гениев точных наук» [1]. Присоединяясь к этим словам, отметим, что приобщение к трудам Эйлера, в частности, посвященным изучению вращения твердых тел, а также планет, включая и Землю, необходимо не только исследователям в области чистой и прикладной математики, но и тем, кого интересуют наблюдения за вращениями планет, а также их интерпретация.

Систематическое изучение вращения Земли по данным наблюдений специальных служб, координируемое международными научными союзами, началось только в XX веке. Неудивительно, что информация по этой проблеме стала огромной по сравнению с той, которой располагали астрономы и геодезисты в эпоху Эйлера. Несмотря на это, не только продолжалось изучение теории вращения тел по Эйлеру, но продолжалось также и сравнение полученных им и современных численных оценок параметров, описывающих вращение Земли, а причины расхождения оценок до сих пор продолжают оставаться предметом обсуждения и дискуссии.

В XX веке было принято разделять изучение вращения Земли на две задачи: задачу «вращения Земли в пространстве», решаемую методами астрометрии и небесной механики, и задачу, называемую обычно изучением «движения полюса в теле Земли», решаемую методами астрометрии, геодезии и геофизики. В обоих случаях речь шла о движении одной и той же оси, но в разных системах координат, т. е., если выразиться коротко, в первом случае речь шла о движении оси, во втором — о движении полюса. В настоящее время представители геодезии и геофизики наращивают свою активность в решении второй проблемы. Перечисленные отрасли науки являются взаимозависимыми, поэтому **успех в изучении вращения Земли зависит от понимания проблемы в ее нерасчлененности, единстве, что достижимо при изучении трудов великих предшественников — тех, кто поставил задачу и продвинул ее решение.**

Обсуждение истории теории вращения небесных тел часто начинается с «Начал» Ньютона и вклада Даламбера [2]. Однако следовало бы называть Эйлера до Даламбера, поскольку первый раньше, чем Даламбер, приступил к решению общей задачи о вращении тел. Такое мнение было высказано Сретенским в 1958 г. [3], а также Вильсоном в 1987 г. [4].

Изложение основ кинематики вращения твердого тела, в частности Земли, начато Эйлером в статье 1744 г. [5], статье [6] и книге [7], которая, как видно из ее названия, является переводом Эйлера с английского на немецкий язык труда Беньямина Робинса, с приложением необходимых пояснений и многочисленных замечаний самого Леонарда Эйлера. Русский перевод этой книги под редакцией Б. Н. Окунева, вышедший в 1961 г., назван «Новые основания артиллерии».

В упомянутой статье [6] и книге [7] использованы такие понятия, как моменты инерции относительно осей, потенциал силы или скорости, т. е. намечена разработка динамики твердого тела. Эйлер пришел к выводу, что всякое движение можно разложить на поступательное и вращательное: поступательное движение тела определено движением его центра тяжести, вращение происходит вокруг оси, проходящей через эту точку. (Заметим здесь, что применительно к планетам под поступательным движением подразумеваются их орбитальные вращения.) Если прямая приложения внешней силы проходит через центр тяжести тела, то изменяется только поступательное движение, если не проходит, будут изменены и поступательное и вращательное движения. В работах 1744 и 1745 гг. Эйлер указал на существование мгновенной оси вращения, ее пересечение с поверхностью тела определяет полюс вращения. Эти суждения Эйлера повторены в его статье 1752 г. [8]. Термин «мгновенная ось вращения» («l'Axe instantané») введен Даламбером [2], и в 1749 г. Эйлер отметил приоритет Даламбера в исследованиях прецессии земной оси. В 1752 г. было опубликовано специальное уведомление «Avertissement...» [9], в котором Эйлер заявлял, что он выполнил свою работу только после прекрасного труда Даламбера об этом предмете, т. е. книги Даламбера 1749 г. о прецессии и нутации оси Земли, в которой указан путь исследований, и это указание принадлежит единственно Даламберу.

В связи с этим, отметим здесь, что упомянутые подготовительные труды Эйлера [5]–[7] и последующие его публикации 1749 г. [10]–[12] имеют общий характер — они касаются твердого тела общего вида, тогда как решение Даламбера построено для земного сфероида Клеро. Публикация Эйлера 1951 г. [13] посвящена определению прецессии и нутации оси вращения девяти моделей Земли: сферической сфероидальной, однородной и с ядром. Даламбер неоднократно повторял, что он первый дал «строгое» решение задачи о прецессии и нутации земной оси, отдавая должное Ньютону и не упоминая работ Эйлера. При этом он ссылался на признание его заслуг Эйлером.

Для Эйлера характерно желание избежать недоразумений в вопросах о приоритете. Он всегда с готовностью уступал его другим, даже скромно продвинувшим изучение проблемы по сравнению с ним. Например, работа Эйлера 1752 г. [8] посвящена исследованию свойств главных центральных осей инерции. Однако в письме Карстену от 20 марта 1761 г. Эйлер приписывает открытие этих осей Сегнеру [14], в доступной форме изложившему механическую сущность задачи, что оценил Эйлер. По просьбе Эйлера Карстен в предисловии к книге Эйлера 1765 г. [15] приписал Сегнеру вывод о том, что каждое тело имеет три взаимно перпендикулярные главные центральные оси инерции. Комментаторы обычно соглашаются с этим, хотя сам Сегнер, на с. 15 своей публикации [14] заметил, что оси инерции были известны Эйлеру, он же (Сегнер) изложил задачу своим собственным образом, детально и общедоступно.

Благодаря тому, что Эйлер решал проблему вращения тел в общем виде, его решения находили приложения как в технике, так и в небесной механике. Для доказательства вернемся к его трудам.

Книга Эйлера о движении корабля «Морская наука» [10] явилась новым этапом в развитии динамики твердого тела, в ней вращение разложено на три составляющие относительно трех взаимно перпендикулярных осей, образующих triplex **с вершиной в центре тяжести**; относительно главных центральных осей инерции тело может вращаться свободно. Эйлер использует потенциал, называя его altitudo debita.

В статье о движении Юпитера и Сатурна [12] показано, что из-за больших сжатий этих планет действующие между ними силы не проходят постоянно через их центры, а поэтому в орбитальных движениях этих планет, могут возникнуть дополнительные возмущения. В разделе 10 статьи [12] Эйлер отметил трудность определения нутации земной оси вращения из-за смещения результирующей силы притяжения Земли Солнцем и Луной с земного центра массы; поскольку неизвестны методы механики, соответствующие этому случаю, **необходимы «новые открытия в анализе».** Подобные суждения высказаны и в другой статье того же года [11].

В русской учебной литературе осевое твердотельное вращение Земли принято относить к **центру ее масс**, тогда как вращение системы Земля–Луна относится к их общему **центру тяжести, который, как известно, изменяет свое положение относительно центров Земли, Луны и Солнца.** Следовательно, «новые открытия в анализе», которые Эйлер мог иметь в виду, — это такие, как, например, аналитическое решение задачи трех тел. Решение столь сложной задачи динамики расширило бы возможности для создания численной модели, описывающей движения трех центров массы системы Солнце–Земля–Луна. Такого решения нет даже для трех твердых тел сферической формы. Задача построения модели, точно описывающей движения указанных тел, еще сложнее, т. к. фигура Земли близка к эллипсоиду вращения, а фигура Луны — к трехосному эллипсоиду.

Рассмотрение Эйлером движений тел, не обладающих сферической симметрией, и его замечание о необходимости различать центр масс Земли и точки приложения результирующих сил ее притяжения Луной и Солнцем (attrahentis centrum), обсуждалось в ряде статей М. И. Юркиной с соавторами, например в [16], [17]. Юркина обратила внимание на работы Эйлера 1765 гг. [15], [18], конец 16-й главы в монографии [15] и 12-й раздел в «Astronomia mechanica», найденной в архиве Эйлера и опубликованной в 1862 г. [19].

Общеизвестным по всем курсам небесной механики является трактат Эйлера 1765 г. «Теория движения твердых тел» [15], где рассмотрена задача об определении ориентации Земли в пространстве и положения оси вращения Земли, которая считается твердым телом, в теле Земли. Эта монография неизменно упоминается также в связи с предсказанным Эйлером движением полюса относительно Земли — его открытием, сделанным более чем за 100 лет до того, как это явление удалось обнаружить из наблюдений, т. е. выделить в наблюдаемых явлениях. В 12-й главе описан способ установления периода свободного движения полюса по земной поверхности. Численный вывод по современным данным есть в книге Бурши и Печа [20]. Численные оценки Эйлера не совпадают с современными, о чем мы упомянули в начале статьи; дополнительно мы остановимся на этом при анализе практического подтверждения мнения Эйлера о движении полюса.

В учебной литературе указание Эйлера на существование периодического движения полюса Земли относительно ее поверхности принято относить к 1765 году, однако уже в опубликованных ранее работах [6], [7], упомянутых выше, Эйлер отмечал, что если ось вращения совпадает с главной центральной осью инерции, то она фиксирована в теле, если же не совпадает, то ось вращения движется в теле. Кроме свободного движения полюса, которое в литературе часто называют «свободной нутацией оси», Эйлер рассматривал также и возможность его вынужденного движения. Так, в публикации 1751 г. [13] Эйлер отметил, что силы, направления которых не проходят через центр тяжести Земли, могут объяснить движения полюсов. Эту *механическую* причину, упомянутую во многих работах Эйлера, не обсуждали астрономы, которые в XX веке для объяснения выводимого по наблюдениям движения полюса пытались привлечь *гипотезы* о влиянии землетрясений, движений воздушных масс, активности Солнца и т. п.

При рассмотрении задачи о совместном определении ориентации оси Земли в пространстве и в теле Земли [15] Эйлер полагал главные центральные моменты инерции Земли различными, что обуславливает возможность появления вращательных моментов внешних сил и изменений ориентации Земли в пространстве под влиянием Луны и Солнца. Поверхность Земли Эйлер считает, для упрощения задачи, не имеющей рельефа, и рассматривает вопрос об оси вращения как о прямой, которая проходит через центр масс Земли и полюс — точку поверхности. Эйлер пришел к важному выводу: **задача о разделении поворота твердого тела относительно неподвижной системы координат на некоторое пространственное движение оси вращения планеты и поворот тела планеты относительно этой оси (т. е. одновременное определение прецессионно-нутационного движения и вращения полюса по поверхности планеты) является недоопределенной.** На этом выводе мы остановимся ниже.

В статье 1776 г. [21] Эйлер показал, что всякое смещение твердого тела может быть описано смещением начала координат и тремя углами[1], определяющими поворот тела относительно начальной ориентации. При этом существует ось вращения — каким бы образом твердое тело ни было смещено из одного положения в другое, всегда существует такая прямая, направление которой не изменяется. **Начало координатной системы, к которой отнесены наблюдения этого явления, может не лежать в центре тяжести тела, может даже лежать вне тела.**

Последние слова, выделенные нами, свидетельствуют о том, что Эйлер четко представлял особенности той опорной системы, относительно которой астрономы определяют вращения земной оси в пространстве. В связи с тем, что современные астрономы кроме этого вращения оси определяют также ее движение по отношению к поверхности Земли, предсказанное Эйлером, остановимся подробнее на используемых ими координатных системах.

Вращение Земли в пространстве изучается в системе координат, опирающейся на *места* звезд, т. е. на координаты их *проекций,* отнесенные к сфере неопределенного радиуса, называемой «небесной сферой». До тех пор, пока не обнаружены годичные параллаксы опорных светил — звезд, а в настоящее время галактик и квазаров, — допустимо рассматривать расстояния до указанных светил как практически бесконечные, следовательно, радиус сферы, на которую спроектированы координаты таких опорных светил (радиус небесной сферы), допустимо считать бесконечным. Соответственно, для *центра* сферы неопределенно большого радиуса не существует единственного положения, его можно располагать во множестве точек до тех пор, пока это смещение центра не изменяет относительных положений проекций опорных светил.

Это обстоятельство легко воспринимается теми, кто знаком с переходом от наблюдаемых с Земли движений *проекций* планет к изучению движений *тел* планет и Земли в метрическом пространстве, в литературе этот переход часто называют «переходом от видимых движений к истинным».

Сферические системы экваториальных и эклиптических координат, связанные с *проекциями* звезд на небесную сферу, еще в глубокой древности использовались астрономами. В них изучались видимые движения планет, Солнца и Луны. Чтобы Коперник и его последователи смогли перейти от изучения движений проекций планет по небесной сфере к изучению движений их тел в трехмерном пространстве, необходимо было найти центр орбитальных вращений и уточнить расстояния планет до центра. **Только после этого появилась возможность изучения движений тел Солнечной системы методами динамики,** перехода к триаде, или декартовой системе координат, начало (центр) которой связали с конкретной точкой — поместили в центр Солнца; в настоящее время начало координат связывают с барицентром Солнечной системы.

Покажем, что в истории изучения осевого вращения Земли прослеживается аналогичный путь: от движений проекций к движениям частиц или слоев.

Явление предварения равноденствий, известное нам как открытие Гиппарха, долго считалось одним из движений звездной сферы. Оно объяснено только Коперником как движение оси вращения Земли, и Ньютоном в динамике интерпретируется как равномерная составляющая движения оси Земли, вызванная влиянием сил притяжения Луны и Солнца на экваториальное утолщение Земли. Присутствие колебательной составляющей в движении земной оси непосредственно следует из закона всемирного тяготения Ньютона; оно было обнаружено Брадлеем. Необходимо отметить, что, хотя основные периоды нутационных колебаний земной оси известны из динамики, их амплитуды и в настоящее время определяются на основе наблюдений. Численное значение скорости прецессионного движения (так называемая постоянная прецессии — фундаментальная величина в астрономии) также определяется из наблюдений.

Поскольку прецессионно-нутационное вращение оси Земли отслеживается в координатной системе, отнесенной к координатам на сферической **поверхности** (по современной терминологии, в двумерном пространстве)**,** необходимо и достаточно двух координат (α, δ) для его описания. Поскольку радиус опорной сферы практически бесконечен, совершенно справедливо выделенное нами замечание Эйлера из статьи [20] о том, что **начало координатной системы, к которой отнесены наблюдения за вращением земной оси, может не лежать в центре тяжести тела, может лежать вне тела.** Иными словами, **изменяющееся направление** вращения земной оси можно определить относительно звезд, но положение центра этой оси невозможно однозначно связать со звездами.

Прецессионно-нутационное вращение оси Земли относительно звезд или квазаров выражается только в угловой мере, и, благодаря широте допустимых пределов для положения центра оси, его можно совместить и с той конкретной точкой, которая избрана для изучения движения полюса по поверхности Земли.

Действительно, в изменениях координат проекций звезд не обнаруживается суточного параллакса, т. е. влияния смещения наблюдателя, равного диаметру земного шара. **Но это смещение влияет на наблюдаемые места более близких тел** (например, Луны**)**, поэтому при изучении движения земной оси относительно поверхности Земли недопустима отмеченная нами выше «свобода» в расположении оси вращения Земли и ее центра. Требуется допустить, что ось проходит через центр Земли, чтобы, зная радиус земной сферы, перевести наблюдаемые угловые смещения в линейную меру.

Определение положения центра массы Земли относительно точек земной поверхности было задачей гравиметрии и геодезии. Астрономы не уделили внимания этому вопросу потому, что **приступили к изучению движения полюса также в звездной системе координат** (λ, φ), хотя она и отличалась от координатной системы (α, δ), в которой изучалось вращение оси относительно звезд. Большая свобода в выборе положения центра оси вращения относительно звездной сферы позволяла совместить его с тем центром, который находили представители смежных наук, пользуясь астрономическими данными.

Чтобы разобраться в системе координат, в которой изучалось движение земной коры относительно оси, т. е. движение полюса, необходимо обратиться к истории вопроса.

Возможность изучения гениально предсказанного Эйлером движения полюса появилась только во второй половине XIX века, когда повысилась точность наблюдений, что позволило Петерсу (из наблюдений с вертикальным кругом в Пулкове), а затем Кюстнеру и Чандлеру обнаружить изменения в наблюдаемых значениях широт (φ) звезд, которые были интерпретированы как следствие предсказанного Эйлером свободного движения полюса. С 1905 года начались систематические наблюдения за движением полюса, когда была организована Международная служба широты (МСШ) — сеть из пяти международных станций, расположенных примерно на одной параллели. На каждой из станций в ясные ночи измеряли зенитные расстояния звезд и, используя каталожные склонения (δ) звезд, находили широту места, а из наблюдений нескольких ночей выводили изменения широты станции.

Склонения «широтных звезд» определялись затем на обсерваториях с целью их приведения к системе склонений звезд фундаментального каталога. В то время фундаментальный каталог определенной эпохи наблюдений представлял собой главную систему положений звезд, называемую абсолютной (независимой от определений координат в предыдущие эпохи [22]).

Небесный экватор и нуль-пункт на нем для отсчета второй координаты (α) *подвижны* — они фиксируются координатами звезд, постоянными *только* на эпоху наблюдения каталога. Поскольку от *подвижного экватора* отсчитывались как склонения звезд, так и широты земных пунктов, существовала возможность раздельного изучения изменений склонений звезд и изменений широт пунктов. Изменения координат звезд служили для изучения прецессионно-нутационного вращения земной оси, изменения широт станций — для изучения движения полюса.

Такой была постановка задачи в эпоху организации МСШ. Трудности возникли, во-первых, с интерпретацией обнаруженных периодов, не совпадающих с периодом свободного движения, предсказанного Эйлером[2]**,** а затем — в связи с обнаружением изменений широт самих станций и непериодической составляющей в движении полюса (полодии). Несовпадение оценок породило многочисленные статьи, со стороны как теоретиков, так и интерпретаторов наблюдений.

В последующие десятилетия первоначальная международная служба (МСШ) расширялась и реорганизовывалась, изменяла название, объединялась с Международным бюро времени для привлечения многих наблюдений с разнообразными инструментами. При этом для определения движения полюса стали использовать не только широты, но и долготы мест наблюдений. Изменения подробно описаны в специальной литературе; они были направлены, главным образом, на увеличение количества результатов наблюдений. Мы не будем останавливаться на частых изменениях, отметим только, что они вносили влияние дополнительных факторов на результаты наблюдений, и что задача оказалась недоопределенной, поскольку число неизвестных, подлежавших определению, превзошло число *независимых* уравнений, получаемых из наблюдений. Для выбора единственного решения из множества возможных в недоопределенной задаче пришлось прибегать к использованию различных статистических ограничений на движения пунктов наблюдений (см. об этом, например, в [23]).

Вторая координата, изменения которой стали также привлекать для изучения движения полюса, имела большее основание называться земной. Долготы пунктов (λ) были связаны с направлением отвеса в точке установки меридианного круга Гринвичской обсерватории, т. е. однозначно закреплены относительно земного направления. Затем в начало (нуль-пункт) отсчета долгот вносились изменения, и оно оказалось закрепленным координатами нескольких обсерваторий в некую «начальную» эпоху, т. е., хотя и не однозначно, а лишь статистически, все же оставалось связанным с направлениями земных отвесов.

Как известно, астрономические службы определяли сначала поправку своих часов, а затем неравномерность вращения Земли, используя прямые восхождения звезд, началом отсчета которых является точка весеннего равноденствия. Поскольку при этом производился прием сигналов точного времени нулевого меридиана, через звезды осуществлялась связь долгот точек наблюдений также и с началом отсчета долгот.

«Земные» широты не были зафиксированы каким-либо земным направлением с постоянной координатой φ[3], т. к. при их определениях использовались каталожные склонения звезд**.** Склонения звезд, как известно, изменяются не только от прецессионно-нутационного вращения Земли, но и от собственных движений звезд; на склонения влияет смещение точки Весны относительно звезд, зависящее не только от движения земной оси, или экватора Земли, **но и от движения эклиптики.** Следовательно, в наблюдаемые изменения широт, отсчитываемых от небесного экватора, проникали *ошибки* определения прецессионно-нутационного движения, а также посторонних движений, не зависящих от движения земной оси.

Можно утверждать, что *выводимое* движение полюса было отягощено рядом систематических влияний, посторонних, не связанных с движением оси Земли по отношению к точкам, лежащим на ее поверхности. Посторонние влияния в XX веке учитывались теоретически, благодаря использованию усовершенствованных численных моделей, одна из которых описывала прецессионно-нутационное вращение оси, а другая –движение эклиптики. Однако достаточно напомнить о том, что амплитуды нутационных колебаний уточнялись по наблюдениям служб (например, в известной работе [24]), следящих за движением полюса (!), чтобы трудности с раздельным определением двух вращений оси стали очевидными. Нетрудно увидеть порочный круг. Выход из него не мог быть найден путем усложнения численных моделей, которое приводило к увеличению числа искомых параметров моделей, подлежащих уточнению по наблюдениям, в результате чего недоопределенность систем уравнений, получаемых из наблюдений, только возрастала.

То, что астрономы называли движением полюса, было **отражением движения земной оси в системе долгот и широт**, **спроектированных на звездную сферу**[4]. Координаты λ и φ назывались земными, но их нельзя признать координатами той системы, которая достаточна для изучения движения оси вращения относительно земной коры, т. е. движения полюса, предсказанного Эйлером, который опирался на принципы динамики и уравнения движений в трехмерном пространстве. Для создания численной модели, описывающей вращение полюса земной оси относительно точек, лежащих на ее поверхности, необходима система координат с **конкретным центром, расстояния до которого отдельных точек или слоев были бы известны.**

В XX веке создание такой системы координат было сложной задачей, ее решение относилось к области геодезии и гравиметрии, требовало специальных, трудоемких наблюдений и состояло из нескольких этапов с использованием результатов астрономических наблюдений. Астрономы также исходили из возможностей своего века, при этом из-за известного процесса дифференциации науки их связь с геодезистами постепенно ослабевала.

Технические достижения прошлого века создали благоприятные условия для новой постановки задачи, в решении которой возросла роль геодезии. Новые возможности геодезии открылись благодаря ее техническому перевооружению. Наблюдения, полученные при помощи спутников в системах GPS и ГЛОНАСС, позволяют связать положения многих пунктов с центром массы Земли, благодаря чему решаются практические проблемы ориентировки на суше, море и в воздухе.

Установить связь точек на поверхности Земли с ее центром оказалось возможным без использования результатов астрономических оптических наблюдений; в геодезической литературе теперь обсуждается обнаруженное движение центра и вопрос о его связи с осью вращения Земли. Неслучайно проблема учета нутации, относившаяся к области астрономии, стала интересовать геодезистов. В этой связи закономерен интерес к трудам Эйлера, проявленный, в частности, в работах М. И. Юркиной с соавторами. Хотя С. А. Толчельникова (второй автор этой статьи) не могла согласиться с высказанным в статье [17] предложением учитывать смещения центра массы Земли под влиянием Луны и Солнца при выводе нутации земной оси, обсуждение этого вопроса оказалось полезным для обеих сторон. Положение центра оси не влияет на искомые значения углов между осью вращения и проекциями практически бесконечно далеких тел, что мы подробно объясняли выше.

Не менее актуален вопрос об ориентировке осей земной системы координат, который был поставлен учеными Центрального научно исследовательского института геодезии, аэросъемки и картографии.

В астрометрии также произошло техническое перевооружение. События на рубеже нового века были названы революцией в астрометрии [25]. Направления осей системы координат ICRS (International Celestial Reference System), заменившей прежнюю небесную опорную систему, которая была представлена последовательностью фундаментальных каталогов, связано с проекциями квазаров и радиогалактик, которые значительно дальше звезд. Поэтому проекции первых на небесную сферу не обнаруживают даже годичных параллактических смещений, что и позволило совместить центр ICRS с барицентром Солнечной системы [25].

Очевидно, направление осей ICRS не изменится, если связать ее центр с любой точкой в пределах земной орбиты. Можно расположить центр ICRS в центре Земли, но при этом сохраняется необходимость в учете годичной аберрации и ее изменений. Современная международная служба вращения Земли IERS (International Earth Rotation Service), в число многих обязанностей которой входит связь различных координатных систем, в конечном счете, относит все движения относительно земной коры к главной опорной системе ISRS.

Возвращаясь к вопросу об ориентировке *земной* системы координат, отметим, что небесная система ICRS отличается от фундаментальной также тем, что в ней **с проекциями квазаров и радиогалактик скреплены три опорных направления** (в [25, с. 138] ICRS называют триадой). В прежней опорной системе фиксировалось два направления относительно звезд: полюс, связанный с небесным кругом, и нуль-пункт. Благодаря появившейся у современных геодезистов возможности устанавливать непосредственную связь земных точек с центром Земли и использованию атомного времени, появилась возможность построения «вращающейся триады», оси которой были бы зафиксированы конкретными точками на земной поверхности; такой земной координатной системы пока нет, но она может оказаться необходимой для использования динамических методов, разработанных Эйлером.

Хотя при наличии трех **опорных** направлений можно было бы изучать вращение «подвижной» земной триады вокруг точки, а не вокруг оси, как прежде, Международная служба IERS не отслеживает изменений трех углов Эйлера, но продолжает по-прежнему изучать вращение земной оси и неравномерность вращения Земли, а также движение полюса. И все эти движения относятся к главным опорным направлениям ICRS. Здесь уместно вспомнить предостережение Эйлера о **недостаточности одной системы координат для определения «некоторого пространственного движения оси вращения планеты и поворота тела планеты относительно этой оси»** (см. выше выделенные нами слова из работы Эйлера [15]).

Отсюда очевидно, что постановка проблемы изучения вращения Земли совместными усилиями представителей астрономии, геодезии и гравиметрии находится в стадии становления. Мы являемся свидетелями актуальности идей Эйлера для современной науки и практики. Эйлер, гениальный математик, развивший динамическую теорию вращений твердых тел и Земли, не замыкался в абстрактных построениях. Его многогранный талант и энциклопедические познания позволяли ставить задачи перед будущими поколениями исследователей, не только теоретиков, но и практиков, изучающих явления по наблюдениям.

Наши современники постепенно осознают необходимость преодоления межотраслевых барьеров для успешного развития наук, без этого невозможно освоение богатого эмпирического материала, накопленного за всю историю астрономии и геодезии и стремительно растущего в XXI веке.

История изучения вращения Земли подтверждает не раз прозвучавшие на этой конференции слова о том, что необходимо изучение наследия Эйлера не только по учебным курсам, но и обращаясь непосредственно к его трудам.

Примечания:

[1] Это известные «углы Эйлера», заменяемые в некоторых технических приложениях «самолетными углами».

[2] Многие публикации посвящались попыткам объяснить расхождение значения периода движения земного полюса (305 суток), предсказанного Эйлером, с обнаруженными в наблюдениях периодами: Чандлера (427–436 суток) и годичным. Современные наблюдатели обнаружили непостоянство амплитуд, а также другие движения с меньшими периодами. Объяснения ищут, рассматривая различные модели внутреннего, слоистого строения Земли: трение между слоями, различие во вращениях ядра и слоев и т. д. О привлечении гипотез мы упомянули выше.

[3] Хотя установку пяти станций МСШ можно рассматривать как попытку закрепить нуль-пункт отсчета широт на теле Земли, но в то время не было возможности перевести склонения звезд в систему координат, связанную с постоянной широтой, что позволило бы отсчитывать широты всех обсерваторий от международной параллели (в системе пяти станций МСШ).

[4] В XX веке астрономы провели сравнение широт, наблюдаемых в северном и южном полушариях, с целью определения того, одинаково ли движутся северный и южный полюса. Очевидно, смещения центра оси к южному, либо северному полюсу, либо в иных направлениях **в принципе** невозможно определить, если положение полюса фиксируется в звездной (или «квазарной») системе координат.

Литература:

1. *Келдыш М. В., Губер П.* Вступление. LEOO IV A, 1. С. VI–VII.

2. *D'Alembert J.* Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre dans le système Newtonien. Paris: David, 1749. P. 83.

3. *Сретенский Л. Н.* Динамика твердого тела в работах Эйлера // Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 210–229.

4. *Wilson C.* D'Alembert versus Euler on the precession of the equinoxes and the mechanics of rigid bodies // Archive for history of exact sciences. 1987. Vol. 37. N. 3. P. 233–273.

5. *Euler L.* De communicatione motus in collisione corporum sese non directe percutientium (1744)//LEOO II, 8. P. 7–25.

6. *Euler L.* Dissertation sur la meilleure construction du cabestan // Pièces qui ont remporté le prix II de l'Académie royale des sciences, en 1741. Paris: G. Martin, 1745. P. 29–87. (= LEOO II, 20. P. 36–82.)

7. *Euler L.* Neue Grundsätze der Artillerie aus dem Englischen des Hrn. G. B. Robins übersetzt und mit vielen Anmerkungen versehen. Berlin: A. Haude, 1745. (= LEOO II, 14; *Эйлер Л.*

Новые основания артиллерии / Пер. П. Д. Львовского. Ред. и предисл. Б. Н. Окунева. М.: Гос. издательство физ.-мат. литературы, 1961.)

8. *Euler L.* Découverte d'un nouveau principe de Mécanique // MAS Berlin, 1750. T 6. P. 185–217. (= LEOO II, 5. P. 81–108.)

9. *Euler L.* Avertissement au sujet des recherches sur la precession des équinoxes // MAS Berlin, 1752. T 6. P. 412. (= LEOO II, 29. P. 124.)

10. *Euler L.* Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus // LEOO II, 18–19.

11. *Euler L.* Recherches sur le mouvement des corps celestes au général // MAS Berlin, 1747. T. 3. P. 93–143. (= LEOO II, 25. P. 1–44.)

12. *Euler L.* Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et Jupiter // Recuiel des piéces qui ont remporté le prix de l'Académie Royale des Sciences en 1748. Paris: Martin, Coignard et Guerin, 1749. (= LEOO II, 25. P. 45–157.)

13. *Euler L.* Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre // MAS Berlin, 1749. T. 5. P. 289–325. (= LEOO II, 29. P. 92–123.)

14. *Segner J. A.* Specimen theoriae turbinum. Halae: Typis Gebaueriants, 1755.

15. *Euler L.* Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum... // LEOO II, 3–4.

16. *Yurkina M. I.* On a certain doubt L. Euler had with respect to determining the rotation of the Earth and celestial bodies // Studia geophysica et geodaetica. Vol. 39. N. 1. P. 11–18.

17. *Yurkina M. I., Bondareva M. D.* On the determination of the Earth rotation // Proceedings of the International symposium «Figure and dynamics of the Earth, Moon and Planets». Part 3. Prague. P. 803–811.

18. *Euler L.* Remarques générales sur le mouvement diurne des planèts // MAS Berlin, 1758. T. 14. P. 194–218. (= LEOO II, 29. P. 199–219.)

19. *Euler L.* Astronomia mechanica. Opera postuma // Mathematica et physica. T. 2. Petropoli: Eggers et Socios; Rigae: S. Schmidt; Lipsiae: L. Voss, 1862. P. 175–316.

20. *Burša M., Pěč K.* Gravity field and dynamics of the Earth. Berlin: Springer, 1993.

21. *Euler L.* Formulae generalis pro translatione quacunque corporum rididorum // N. Comm. 1776. T. 20. P. 189–207. (= LEOO II, 9. P. 84–98.)

22. *Толчельникова-Мурри С. А.* Использование принципа относительности движения для построения абсолютной системы сферических координат // Современная астрономия (по материалам 23-й Астрометрической конференции СССР). Л.: Наука, 1988. С. 439–446.

23. *Федоров Е. П.* О системах координат, применяемых службами широты и времени // Астрономия и астрофизика. Киев: Наукова думка, 1974. № 23. С. 3–20.

24. *Федоров Е. П.* Нутация и вынужденное движение полюсов Земли. Киев: Изд-во АН УССР, 1958.

25. *Walter H., Sovers O.* Astrometry of Fundamental Catalogues. Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.

В. В. Окрепилов
Санкт-Петербург, Россия

Леонард Эйлер и его вклад в метрологию

Abstract: The article is devoted to one of the rarely described areas in the scientific and practical activity of Leonard Euler: his work on the theory of precise measurement (metrology) and its practical application. It tells us of his most significant achievements in this field. He advocated the decimal principle for dividing up units of measurement, foresaw the introduction of the metrical system, worked out a mathematical method for constructing scales, investigated the behavior of a magnetic needle, experiences with the recently found manometer and much more. The wealth of Leonard Euler's scientific and applied heritage has been widely used by subsequent generations of Russian scientists and research managers in the field of metrology.

Some of information and pictures come from the First St. Petersburg Calibration Agency of the Trade Measures and Weights' Museum of history (now Test–St. Petersburg) and from documents of St. Petersburg Branch of RAS's Archive.

Леонард Эйлер был ученым необычайной широты интересов и творческой продуктивности. Его талант распространялся на многие сферы науки. В этой статье будет сделан акцент на не слишком известной области деятельности Л. Эйлера, а именно, на его вкладе в теорию и практику точных измерений (метрологию).

Метрология, наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности, состоит из двух частей: **фундаментальной,** связанной с изучением природы и содержания единиц изме-

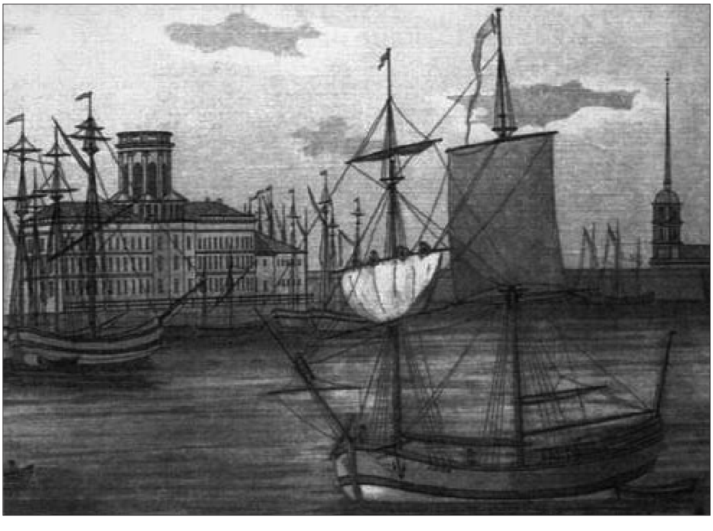


Рис. 1. Вид Кунсткамеры, где начинал свою работу Л. Эйлер. Фрагмент гравюры по рисунку Й. Хирна

рений, и **практической** — обеспечивающей точность и достоверность измерений во всех сферах жизнедеятельности людей. Обе эти части метрологии нашли отражение в работах Л. Эйлера. Занимаясь решением различных физических задач (в механике, астрономии, физиологии и т. д.), Л. Эйлер был вынужден обращать самое пристальное внимание на результаты наблюдений и измерений, добиваясь необходимой точности и приемлемых погрешностей. Не будучи метрологом, он вплотную занимался развитием науки об измерениях и разработкой технических средств для них.

Как все истинные ученые Леонард Эйлер следовал тому правилу, которое впоследствии сформулировал Дмитрий Иванович Менделеев: «Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. Точная наука немыслима без меры». Как выдающийся математик, Эйлер разработал математические методы обработки результатов наблюдений и измерений, применяя теорию вероятности, математический анализ, теорию чисел и теорию анализа ошибок.

На основе собственных математических расчетов Л. Эйлер сконструировал три типа весов на различные диапазоны взвешивания. Им составлены описания каждого из трех типов весов.

Весьма характерно, что текст описания весов размещен прямо на чертеже конструкции и занимает все свободное место листа (рис. 2).

Вот как сформулированы описания трех вариантов весов.

Первый вариант:

Исправные весы на тяжелые вещи

aa — точки, в которых весам быть, ***g*** — точка, которая через линию будет стоять, но так мало, чтоб ***c. g.*** ни сотой доли от ***ac*** не было. Сверх того надобно: точки ***C*** — аккурат в середине линии ***aa*** стоять.

В том же пункте ***g*** надобно и центру тягости у коромысла быть, ибо для того и шуруп под литерою ***h*** сделан. Дабы стрелку аккуратно в точку ***g*** привести, а после того уже шуруп сделать.

c. g. i. — стрелка которой должна стоять перпендикулярно на линии ***aa***. И она же к тому способна, чтоб центр тягости у коромысла над линией ***aa*** привесить.

Главнейшая польза сих весов в том состоит, чтоб тягость коромысла в действие весов участия и силы не имела. Ради этого без всякого вреда коромысло у весов таким долгим и толстым можно сделать, как кто пожелает, дабы на сих весах тяжелые и большие вещи взвешивать [1].

Второй вариант:

Весы для употребления при всяких случаях

aa — точки, в которых чашкам висеть. Они соединены прямою горизонтальной линией ***C***. Острота оси, около которой весы держутся. Ей надобно немного ниже линии ***aa*** быть. ***c. i.*** — стрелка, ***a. c. g.*** — шуруп с тяжелым маточником ***hh,*** через отвертывание и привертывание которого середину тягости коромысла можно выше поднять или ниже опустить.

Сей маточник или гнездо, в котором шуруп утвержден, должно по своей тягости такое быть, что ежели его до самого высочайшего винта поднять, то чтобы центр тягости до ***c*** пришел. А шуруп ***c. g.*** надобно так долго сделать, чтоб через отвертывание центр тягости коромысла по крайней мере 10 раз ниже линии ***aa*** был приведен, нежели как пункт ***C*** под оной стоит.

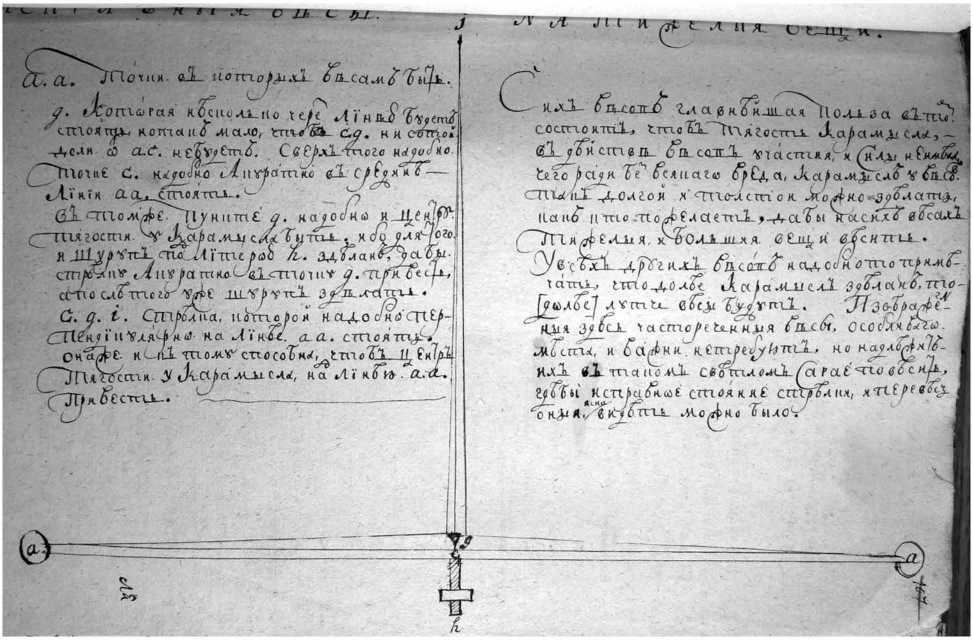


Рис. 2. Исправные весы на тяжелые вещи.
(из документов С.-Петербургского филиала Архива РАН)

Сим шурупом можно при малейшем различии веса такой великий поход сделать, как кто пожелает.

Чем больше вес, тем ниже шуруп ***hh*** отвертывать надобно, и всегда можно через искусство легко найти, как высоко шуруп вывертывать, дабы все тем исправнее отправлялся, ибо сим движением шурупа ***hh*** можно при великой и малой тягости весы так сделать, что у них поход-недовес и исправность будет.

На сих весах можно великие и малые вещи вместо других весов весьма аккуратно взвесить. Лишь бы коромысло сию весимую тягость поднять могло.

И, наконец, описание третьего варианта сконструированных Л. Эйлером весов:

Верные весы на малые вещи

аа – коромысло и по концам точки, где чашкам висеть. Острота или сила оси ***С*** имеет быть в середине коромысла, аккуратно на линии ***аа***. Середина или центр тягости коромысла ***g*** немного ниже линии ***аа*** быть имеет, а для перемены можно по усмотрению на коромысле шуруп ***g, h, l,*** сделать, которым центр тягости можно поднять выше и ниже. Для этого в сих весах стрелки быть не надлежит, но лучше, чтоб обе ручки своими острыми концами равновесие показывали. От сих весов та особливая польза, что всегда одно различие между наложенною тягостью один поход и перевес причиняет. Причем показанные градусы весьма спокойно сделать можно. Таким порядком, например: надобно смотреть, как велико различие между ***б*** гран, а потом и из того на нумерованных лучках сделать особливые градусы.

Польза сих весов более в том состоит, чтоб коромысло так долго и легко сделать, как можно, и при том примечать, что чем выше центр тягости ***g*** к верху подымется, тем чувствительнее все будет.

> Но чтоб оные весы не были фальшивые, то надо шурупом середину найти. И сыскавший шуруп утвердить в линию ***аа***.
>
> Ибо без того в разделении лучков никакой пользы не будет. Сим весам надобно сделать особливое, спокойное место, которое всегда в надлежащее состояние приводится, дабы линия ***аа*** горизонтальна была [1].
>
> Эйлер после всех описаний делает следующее заключение:
>
> У всех других весов надобно то примечать, что чем длиннее коромысло сделано, тем лучше весы будут.
>
> Изображенные здесь весы особливого места не требуют, но надлежит их в таком светлом сарае повесить, где бы исправное состояние стрелки и перевес оных ясно видеть можно было [2].

Л. Эйлер дает не только описание конструкций весов «для употребления при всяких случаях», но и формулирует рекомендации по процедуре взвешивания и даже требования к условиям размещения и эксплуатации каждого из трех типов весов.

Леонард Эйлер принимал активное участие в работах по созданию в России научно обоснованной системы единства измерений. Создание такой системы в нашей стране, отличающейся многообразием укладов, местных традиций, огромной территорией, было исключительно сложной задачей. За ее решение брались несколько раз на уровне государства. Об этом свидетельствует множество исторических документов. В них регламентировались метрологические нормы и правила, а также устанавливалась ответственность за их нарушение.

Первый известный такой документ датирован 996 годом, и этот год считается годом рождения российской метрологии и российской стандартизации.

Это Устав князя Владимира о церковных судах, который возложил надзор за правильностью применения мер и весов на епископов, чтобы «городские и торговые всякие мерила... блюсти без пакости, ни умалити, ни умножити...».

Правильные (так тогда назывались образцовые) меры хранились в церквах, храмах, монастырях, как местах, наиболее надежных для сохранности ценных вещей. Но из-за территориальной раздробленности в то время на Руси имело хождение множество мер, часто совпадавших по названию, но вовсе не одинаковых по размеру. Так, например, сажень, упомянутая впервые в летописях 1017 года, была *и маховая, и косая, и простая*. Подобный разнобой был и при измерении объемов жидкостей и при определении веса.

Несмотря на предпринимавшиеся в различные периоды истории нашего государства усилия, включая и петровские реформы по совершенствованию системы измерений, состояние измерительного хозяйства в России в первой трети XVIII века оставалось неудовлетворительным. Развитие же промышленности, торговли настоятельно требовало не только увеличения количества и точности измерений, но и общей для всей страны системы мер. Поэтому первоочередной задачей было создание единых отечественных образцов мер (эталонов) и приведение к этим эталоном всех измерений, осуществляемых в стране, при помощи усовершенствованной системы поверки.

К решению этой задачи среди других ведущих ученых оказался привлеченным Леонард Эйлер, проявивший здесь свои незаурядные способности. Его богатый теоретический и практический опыт, разработанные им математические методы особенно пригодились при работе в Комиссии по мерам и весам, которая была образована Сенатом в конце 1736 года под руководством видного государственного деятеля того времени, главного директора Монетного правления действительного тайного советника графа М. Г. Головкина.

В состав Комиссии входили представители администрации (граф Михаил Гаврилович Головкин — главный директор Монетного правления, полковник Петр Михайлович Еропкин — придворный архитектор, Иоганн фон Гагемейстер — асессор Юстиц-коллегии); представители Академии наук (**Леонард Эйлер** — профессор высшей математики, Иосиф (Жозеф) Николай Делиль — астроном и географ, Георг Вольфганг Крафт — математик и физик, Христиан-Николай Винсгейм — астроном) и изобретатели (Петр Никифорович Крекшин — оберкригскомиссар, Андрей Константинович Нартов — механик, изобретатель).

Сочетание аналитического мышления величайшего ученого Эйлера и самобытное видение проблем изобретателем Нартовым, который и сам изготавливал образцовые весы, меры массы и длины, оказалось весьма эффективным и в немалой степени способствовало плодотворной работе Комиссии. Особенно это проявилось при проведении совместных научно-технических экспертиз, которые Эйлер и Нартов выполняли по заданиям Комиссии.

Опыт такой работы Эйлер приобрел еще до создания Комиссии. Так, в 1735 году он провел исследования весов, присланных из Москвы профессором Лейтманом. Отчет о результатах этих исследований сейчас находится в Санкт-Петербургском филиале архива РАН.

Перед Комиссией были поставлены три задачи:

— создание образцовых мер-эталонов;

— установление отношения между различными мерами;

— разработка проекта организации поверочного дела в стране.

Предстояло определить исходные размеры образцов основных мер (длины, веса, объема), выявить соотношения между различными мерами и разработать мероприятия по организации поверочного дела в России.

Л. Эйлер и другие члены Комиссии анализировали применявшиеся тогда в различных местностях образцы мер и пытались выбрать наиболее подходящие. Изначально Эйлером была выдвинута идея создания эталонов, основанных на физических постоянных, он также поддержал предложение использовать десятичный принцип построения мер. Но, к сожалению, не удалось связать основную меру длины с градусом земного шара, а также провести последовательно десятичный принцип деления крупных единиц на более мелкие. Эта идея получила практическое воплощение лишь спустя десятилетия — в метрической системе, как наиболее простой и удобной.

Следует отметить, что Россия более чем какая-либо другая страна была готова к введению десятичной системы мер. Ведь система русского денежного счета была построена по десятичному принципу. Однако по ряду объективных причин претворить эту идею в жизнь тогда не удалось. Первая попытка ее реализации была предпринята лишь спустя 65 лет во Франции. Всемирное же признание система получила лишь через 140 лет, в 1875 году, когда 17 ведущих стран мира, включая Россию, подписали Метрическую конвенцию. Но в самой России метрическая система стала реальностью лишь во времена Д. И. Менделеева, когда был накоплен достаточный опыт метрологических работ.

Комиссия по мерам и весам 1736 года, в связи с возникновением ряда объективных трудностей, вынуждена была отказаться от первоначального проекта коренной реформы существовавших мер. Эйлер стал усиленно искать образцы мер длины, наиболее удобные для принятия их за основу. Такой отправной мерой послужила линейка, найденная среди вещей, принадлежавших Петру I и хранившихся в «Императорском кабинете» Кунсткамеры, которая была равна полуаршину. Именно эту меру Комиссия и решила взять за основу при определении величины *аршина и сажени*.

По этой полуаршинной мере были изготовлены образцы мер длины — медный аршин (рис. 3) и деревянная сажень. Затем эти меры длины послужили основанием для определения размеров единиц измерения сыпучих и жидких тел и единиц веса.

Среди поступивших в Комиссию мер сыпучих тел был выбран *четверик* Московской большой таможни, по которому осуществлялась поверка мер сыпучих тел в других городах. Такой выбор не вносил особых нарушений в устоявшуюся систему мер сыпучих тел, то есть в данном случае Комиссия руководствовалась, в первую очередь, практическими соображениями. Те же соображения послужили основанием и при выборе образцовых мер жидких тел. За основу мер объема жидкости было принято *ведро* (рис. 4), присланное из Каменномостского питейного двора в Москве.

При выборе образцовых мер веса решающую роль сыграло мнение Л. Эйлера. Рассматривая поступающие в Комиссию предложения, он давал по каждому из них научно обоснованное заключение, отвергая неприемлемые предложения и активно поддерживая наиболее разумные. Так, по заключению Эйлера был отклонен проект члена Комиссии, известного деятеля петровских времен П. Н. Крекшина. Он заключался в том, чтобы использовать для определения единиц веса старые монеты из чистого серебра или древние золотые вещи, на которых был указан вес.

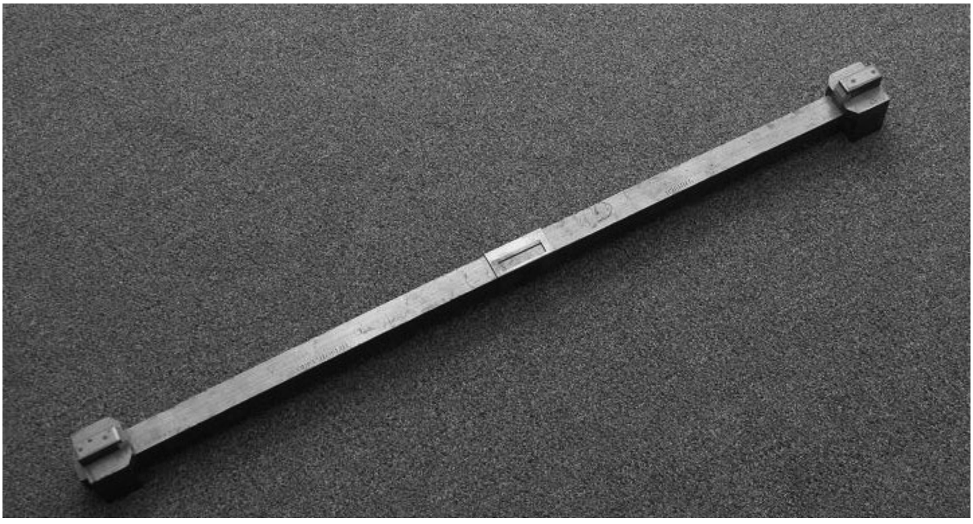


Рис. 3. Латунный образцовый аршин
(из экспозиции музея истории «Тест–Санкт-Петербург»)

Рис. 4. Меры вместимости (1/10 ведра, 1/2 ведра)
(из экспозиции музея истории «Тест–Санкт-Петербург»)

Свое несогласие с данным проектом Леонард Эйлер основывал на том, что серебряные и золотые монеты и вещи могли от употребления потерять в весе. Эйлер также отверг предложение П. Н. Крекшина о преднамеренном увеличении веса образцового фунта, что якобы позволяло повысить точность взвешивания. Если бы проект Крекшина был принят, это было бы узаконенным искажением принятого веса фунта.

Проанализировав все поступившие предложения и приняв во внимание положительное заключение Л. Эйлера и других профессоров, Комиссия выбрала из имеющихся гирь наиболее точные и, одновременно, удобные, приняв их за основу мер веса. Выбор пал на медную гирю Монетной канцелярии, которая использовалась при взвешивании золотых и серебряных монет при их чеканке, а также при передаче монет на другие Монетные дворы России. В пользу этой гири говорило и проведенное сравнение с мерами веса, присланными из других мест, в частности из Портовой таможни Архангельска. По предложению Л. Эйлера Комиссия по мерам и весам официально заявила о принятии за основу мер веса гири Монетной канцелярии.

Одновременно с выбором образца меры веса Эйлер и другие члены Комиссии рассматривали конструкции разнообразных весов. Экспертизу каждого образца весов по заданию Комиссии выполняли Л. Эйлер и два члена Комиссии — Г. В. Крафт и А. К. Нартов.

Итогом работы Комиссии стал «Регламент, или инструкция, по которой имеет поступь в смотрении в Российском государстве над весами и мерами». В Регламенте нашла отражение система рекомендуемых Комиссией мер длины, веса, объема сыпучих и жидких тел. Его рекомендации учитывались в дальнейшей работе по созданию образцовых мер и организации поверочного дела в России.

Оценивая с позиций нашего времени работу всей Комиссии и роль в ней Л. Эйлера, следует отметить, что результаты ее работы определили на многие десятилетия политику России в области метрологии и поверочного дела, помогли сделать ее успешной.

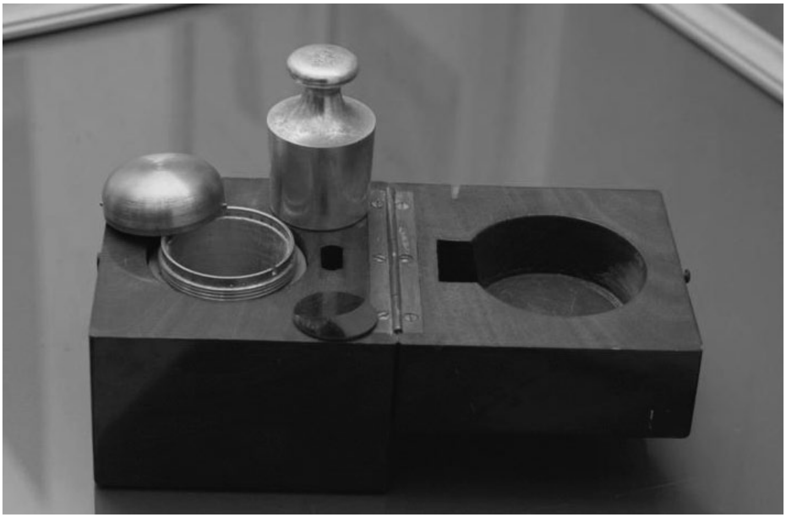


Рис. 5. Аптекарский фунт особой точности
(из экспозиции музея истории «Тест–С.-Петербург»)

В 1741 году Леонард Эйлер уехал в Берлин и вернулся в Петербург только через 25 лет — в 1766 году. В этот период интерес Л. Эйлера распространился и на другие виды измерений. Известна его фундаментальная работа о способе наблюдения наклонения магнитной стрелки (рис. 6) [3]. Эти исследования стали основой для разработки метода повышения точности навигационных приборов в кораблевождении.

Еще одной работой, выполненной за два года до смерти Л. Эйлера, когда он уже практически потерял зрение, является работа по разработке устройства манометра, точно показывающего плотность воздуха в любое время.

Таким образом, по нашему мнению, можно выделить четыре наиболее значимых достижения Л. Эйлера в области метрологии:

— разработал математический принцип конструирования весов;

— предложил использовать десятичный принцип построения мер;

— был инициатором перехода на метрическую систему;

— исследовал поведение магнитной стрелки, предложил устройство манометра, точно показывающего плотность воздуха в любое время.

Богатое научное и прикладное наследие Леонарда Эйлера широко использовалось последующими поколениями российских ученых и организаторов науки в области метрологии.

Одним из продолжателей исследований Л. Эйлера в области метрологии может быть назван Роберт Гайнам (1737–1817) — физик и механик, член-корреспондент Императорской Академии наук. Он установил кратные отношения между русскими и английскими мерами длины. Р. Гайнам был основателем фабрики аршинов в Петербурге.

Следует вспомнить и еще одного последователя Л. Эйлера — Егора Францевича Канкрина (1774–1845), который более 20 лет был министром финансов России.

Он организовал очередную Комиссию по мерам и весам 1832–1842 гг., учредил при Санкт-Петербургском монетном дворе «Собрание образцовых мер и ве-

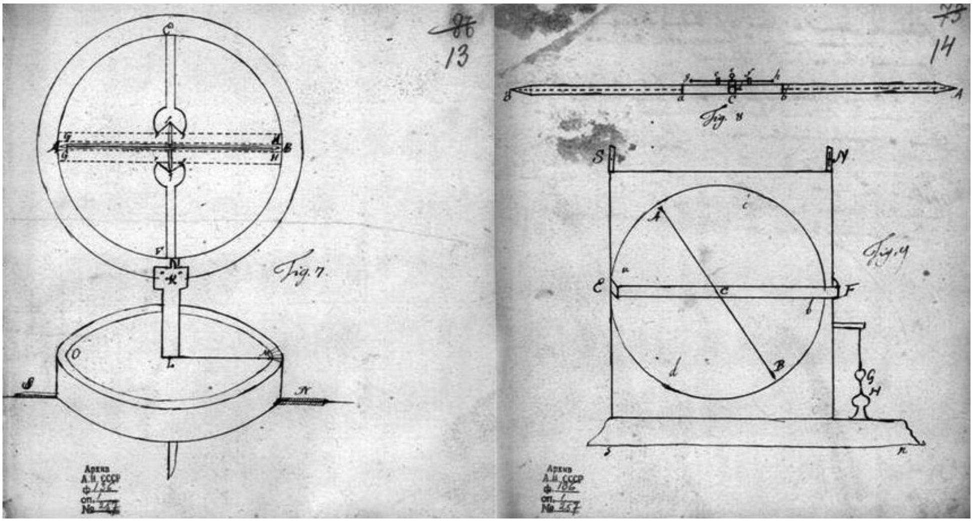


Рис. 6. Способ наблюдения наклонения магнитной стрелки
(из документов Санкт-Петербургского филиала Архива РАН)

сов главнейших иностранных государств», с которыми были сличены основные образцы российской системы мер в 1832–1842 гг. При его содействии в Санкт-Петербурге были открыты Депо образцовых мер и весов, Горный, Лесной и Технологический институты.

В череде великих ученых, использовавших труды и идеи Л. Эйлера, следует назвать Дмитрия Ивановича Менделеева — первого управляющего Главной палатой мер и весов России и инициатора создания многих метрологических учреждений по всей территории России.

И в дальнейшей своей работе в области метрологии Д. И. Менделеев обращался к трудам Л. Эйлера. Такое отношение характерно и для всех метрологов.

За два с половиной века, прошедшие после Л. Эйлера, роль метрологии существенно возросла. Ведь уровень развития государства в современном мире, включая его науку, промышленность, торговлю, медицину, строительство и экологию, в значительной мере определяется состоянием его метрологии и способностью обеспечивать ее непрерывное развитие. Поэтому совершенствование многогранной метрологической деятельности является важнейшей задачей для любого государства. Россия сегодня является одной из ведущих стран в мире, отличающихся высокой достоверностью результатов.

Обращение к прошлому нашей страны дает не только пищу для размышлений о значении давно ушедшего времени, но и возможность понять подлинный смысл настоящего, а также цели и задачи будущего.

Именно в этом и заключается роль и значение наследия Л. Эйлера для теории и практики точных измерений.

Литература:

1. СПбФ АРАН. Ф. 3. Оп. 1. Д. 27. Л. 100–102.
2. *Окрепилов В. В.* Леонард Эйлер и метрология. СПб.: Гуманистика, 2007.
3. СПбФ АРАН. Ф. 136. Оп. 1. Д. 257. Л. 13–14.

В. И. Богданов, Т. И. Малова
Санкт-Петербург, Россия

Леонард Эйлер, наводнения Невы и морские приливы

Abstract: Leonhard Euler's authorship and co-authorship in the series of articles on the flooding, ebbing and flowing of the Neva — published in German and Russian in the first academic journal "Historische, genealogische und geographische Anmerckungen über die Zeitungen" — has now been established for the first time. The detailed description of the main reasons for the rise in level of the Neva is evidence that instrumental observations were carried out in this region before Peter the Great (a documentary record of which may still come to light in the archives of some Northern European country). The close connection between scientific and practical methods of investigating said phenomenon is striking. It was in Russia that the need first arose to create a regional network of water-level measuring and meteorological stations. Contemporary conditions and the problems involved in such an investigation are discussed.

В 1729 г. торжества по случаю дня «высокаго рождения» Императора Петра II совпали с «великим штурмом с моря» 12 (23) октября, «который в 10 часу пред полуднем восстал, и островы сего города от прибылой в здешней реке воды почитай все потопило». Торжества состоялись, но в отсутствие «знатных особ», которые проживали не на Адмиралтейском острове и не смогли приехать по причине основного и «вторичного штурма» [1][1]. Это событие примечательно также тем, что с 28 октября (8 ноября) по 11 (22) ноября 1729 г., впервые в России, была опубликована серия статей о причинах наводнений Невы и о морском приливе и отливе в академическом журнале «Примечания на Ведомости»[2] ([2], [3]), издававшемся в Санкт-Петербурге с 1728 г. под разными названиями на немецком и русском языках ([4, с. 248–249], [5, с. 6]). В статьях приведены измерения высот наводнений Невы 1721, 1726 и 1729 гг. над единым ординаром; рассмотрены основные факторы, вызывающие подъемы воды в Неве; обоснована необходимость создания обсерваторской сети в регионе; изложена теория И. Ньютона о морских приливах и отливах, оценена роль ветров и приливов в формировании наводнений Невы.

При описании основных причин наводнений Невы авторы оперировали такими сведениями о гидрометеорологических условиях на акваториях Северного и Балтийского морей, а также Ладожского озера, которыми Россия до 1729 г. не располагала. Это обстоятельство свидетельствует о выполнявшихся в этом регионе в допетровское время инструментальных наблюдениях, материалы о которых, возможно, сохранились в архивах стран Северной Европы. И хотя в дальнейшем эти статьи была частично [6] или полностью [7] переизданы, но на протяжении большей части XIX и XX вв. они оставались практически неизвестными специалистам по гидрометеорологии и истории науки и техники.

Проблема авторства статей[3]

Тематике наводнений Невы и морских приливов и отливов, помимо указанных выше статей, под условным названием «О прибывании воды в реке Неве и о приливе и отливе», посвящены также публикации в «Примечаниях на Ведомости»: «О том, как должно примечать морской прилив и отлив» ([8], [9], [10, с. 90–96]) и «О прибывании и убывании воды в Неве реке» ([11], [12]). До недавнего времени не было согласия между исследователями в вопросе об авторстве первых двух из них.

Не вызывает сомнений автор статей [11], [12]. Это — Х.Э. Геллерт[4]. Он указан практически всеми источниками (см., например, Протокол заседания академической Конференции от 9 сентября 1743 г. по его докладу о результатах наблюдений за колебаниями уровня Невы в 1739–1742 гг. на набережной Васильевского острова около 8-й линии [13, с. 293]). Кроме того, в конце статей проставлена буква «G» — в издании на немецком и буква «Г» — в издании на русском языке ([11, с. 192], [12, с. 192]).

Ю. Х. Копелевич [14, с. 43–45], на основании находки в рукописях Л. Эйлера [15] автографа инструкции по организации и производству уровнемерных наблюдений за приливами, предположила, что автором статей [8], [9] является Л. Эйлер. Полностью поддерживая этот вывод, необходимо отметить, однако, что он основывается на косвенном доказательстве, поскольку не вызывает сомнений ведомственный характер инструкции, которую можно было скопировать из материалов Морского ведомства или из опубликованных зарубежных статей. Мы вернемся к этому вопросу ниже.

Среди вероятных кандидатур на авторство статей [2], [3], [6], [7] в разное время назывались имена действительных членов Петербургской Академии наук И. Г. Лейтмана[5], Л. Эйлера, Г. В. Крафта[6]. На авторство И. Г. Лейтмана указал в самом начале текста статей Г. Ф. Миллер[7] — редактор журнала «Примечания на Ведомости»: «О подлинных причинах прибылой воды объявил здешний профессор господин Лейтман, который ради особливаго искусства в натуральных и математических делах славен есть». Уже в 1726 г. И. Г. Лейтман изложил существовавшие представления о причинах наводнений Невы в большой статье, «которые бы все при сем сообщить надлежало было, ежелиб нас время ради пространства до того допустило» [3, с. 346]. В другом месте читаем: «Сии суть разсуждения и изследования господина профессора Лейтмана, при которых окончании некоторый благодетель и друг из ученых некоторые примечания о прибыли и убыли, которыя в Океане и во оной впадающих реках бывают, сообщить обещал» [3, с. 360]. При этом 8 ссылок в тексте на «господина издателя», наводившие на мысль об участии в написании статей также Г. Ф. Миллера, были сняты при ознакомлении с повторной публикацией их в сборнике [7]: в шести случаях эти слова заменены на «господин сочинитель», в одном — исключены из текста, в одном случае — сохранены, возможно случайно. Так кто же этот «благодетель и друг из ученых», написавший части 90, 91 этой публикации, посвященные проблеме морских приливов и отливов? В переиздании этой серии статей в 1787 г. сноска к последним словам гласит: «По образу предложения видно, что разсуждение о приливе и отливе и о прибывании воды в Неве реке, от прилива произойти могущем, есть покойнаго Г. Леонгарда Ейлера» [7, с. 51].

В связи с этим обратимся снова к предположению Ю. Х. Копелевич о том, что автором статей 1740 г. [8], [9] является Л. Эйлер. Процитируем начало одной из них: «Мы уже за несколько лет перед сим сообщили нашим читателям пространное описание о морском приливе и отливе и притом объявили все различныя мнения ученых людей о причинах сего случая». Поскольку части 90, 91 журнала «Примечания на Ведомости» за 1729 г. ([2, с. 453–460], [3, с. 361–368]) — единственные до 1740 г. публикации на эту же тему (см., например, [4], [5]), то отсюда следует, что эти части, так же как и части 9, 10 статьи 1740 г. ([8], [9]), написаны одним автором, и этим автором является Л. Эйлер. Наконец, из предисловия Г. Ф. Миллера следует, что первоначальный обширный текст статьи, представленный в 1726 г., был позднее переработан, сокращен и, возможно, дополнен или изменен «некоторым благодетелем и другом из ученых», то есть Л. Эйлером, по согласованию с И. Г. Лейтманом. Тем не менее, в «Систематическом указателе статей» под № 596 [16, с. 40] единственным автором статей [3], [7] снова назван Л. Эйлер.

Так следует ли считать И. Г. Лейтмана соавтором всей обсуждаемой серии статей, если: 1) в основе по крайней мере 60% общего объема их лежат представленные им в 1726 г. обширные «рассуждения» о причинах наводнений Невы; 2) только с его позволения (с «позволения господина сочинителя» [7, с. 10–11]) был опубликован «краткий экстракт из оных», занявший, тем не менее, три из пяти частей этой серии статей; 3) он не принимал участия в окончательной подготовке рукописи к печати; 4) две ссылки на его авторство отражены уже в тексте самих статей? С современных позиций наш ответ вполне однозначен: **«да, следует»**.

Сложнее вопрос с авторством Г. В. Крафта. Согласно Н. И. Невской [17, с. 27–28], Г. В. Крафт назван (предположительно) автором статей [2], [3] (ч. 89–90) на основании общей тематики его публикаций и выполнявшихся им наблюдений за состоянием Невы. Действительно, Г. В. Крафту принадлежат многочисленные статьи по этим вопросам, например, [18], [19]. Но если бы он был автором рассматриваемой серии статей, то следовало бы ожидать, что его сын В. Л. Крафт[8] сошлется на работу отца в своей обобщающей публикации по проблеме наводнений Невы. Однако, имя Г. В. Крафта в ней встречается лишь один раз в связи с измерением скорости штормового ветра во время наводнения Невы 10 (21) сентября 1736 г. ([20, p. 45], [21, с. 46]). Наконец, повторим, что в последней (91-й) части этой серии статей, воспроизведенной в публикации 1787 г. [7, с. 51], автором ее и части 90 назван Л. Эйлер.

Таким образом, суммируя изложенное, мы приходим к выводу, что с современных позиций правильно считать авторами серии статей [2], [3], [6], [7] И. Г. Лейтмана и Л. Эйлера, при редакторских вставках Г. Ф. Миллера, а статей [8], [9] — однозначно, Л. Эйлера. Этот вывод подтверждается также сведениями Каталога 1966 г. [22, с. 135–136] и публикациями 1999 и 2000 гг. ([4, с. 253], [5, с. 13, 40]).

Высоты наводнений Невы 1721–1729 гг. и причины их последующего изменения

Сведения об исторических наводнениях Невы представляют фундаментальный научный и большой практический интерес при изучении эволюции гидродинамической системы Ладожское озеро – река Нева – Финский залив, при уточнении стратегии защиты от наводнений Санкт-Петербурга и сопредельных территорий, а также для Петербурговедения в целом, в качестве «реперных» событий. Однако, несмотря на длительную историю изучения этого феномена, унифицированный и подробный перечень наводнений, который опирался бы на репрезентативные вековые ряды уровнемерных наблюдений, удовлетворял бы разнообразным практическим нуждам города и отвечал бы фундаментальным методологическим принципам науки, — так и не был создан. Противоречат существующим ныне официальным перечням наводнений Невы и сведения исторического характера — сообщения об измерениях, записки очевидцев, архивные сведения, отечественные и иностранные реляции, письма, корреспонденции и т. д. ([23]–[25] и др.).

В 1726 г. И. Г. Лейтман определил высоту наводнения Невы 1 (12) ноября, которая «от 8 часа пред полуднем до 12 часа в полдень на 3½ аршина прибыла» (3,5 аршина ≈ 249 см), а также превышение уровня наводнения 5 (16) ноября 1721 г., которое оказалось «получетвертию аршина выше» [3, с. 346]. Здесь же указано и превышение уровня наводнения 12 (23) октября 1729 г., которое «с пол аршина ниже» (0,5 аршина ≈ 36 см) высоты наводнения 1726 г. Однако в этой статье выявлены описки, и, согласно ее варианту на немецком языке [2, с. 438], превышение уровня наводнения 1726 г. над наводнением 1721 г. составило «полуторачетверть аршина» (0,375 аршина ≈ 26,7 см). Согласно же В. Л. Крафту ([20, p. 43], [21, с. 43]), «самая величайшая высота разлития воды» в 1726 г., измеренная И. Г. Лейтманом, «стояла выше обыкновеннаго ватерпаса 8 английскими футами и 2 десятичными дюймами». Это позволило В. Л. Крафту, используя также превышения «разлитий» Невы 1723 и 1725 гг., представить в системе единого ординара высоты всех наводнений 1721–1729 гг. (Таблица 1)[9].

Таблица 1. Высоты наводнений Невы 1721–1729 гг., по И. Г. Лейтману и Л. Эйлеру (1729 г.) ([2],[3]); В. Л. Крафту (1780, 1795 гг.) ([20],[21]); Р. А. Нежиховскому (1988 г.) [29]

Год	И. Г. Лейтман, Л. Эйлер		В. Л. Крафт		Р. А. Нежиховский
	аршины	см	футы	см	Δ = (6)–(5), см
1	2	3	4	5	6
1721	3,125	222	7,4	226	265 (Δ = +39)
1723	–	–	7,7	235	272 (Δ = +37)
1725	–	–	5,9	180	216 (Δ = +36)
1726	3,5	249	8,2	250	270 (Δ = +20)
1729	3,0	213	7,1	216	237 (Δ = +21)

Из Таблицы 1 следует, во-первых, что представление результатов измерений в футовой мере с десятичными дробями, вызвавшее в XX в. резкую критику А. И. Мордухай-Болтовского [30, с. 18], полагавшего, что речь идет о линейной мере, неизвестной «в русской или иностранной метрологии», практиковалось в Петербургской Академии наук с начала ее создания. Десятичными дробями, предложенными в XVII в. Симоном Стевиным[10], которые существенно облегчали вычисления в любой системе мер, широко пользовались астрономы, моряки и многие ученые Европы. Их использование в гидрометрии оправдывалось также тем, что разность «десятичного» и обыкновенного дюймов (3,05–2,54 ≈ 0,5 см) не превосходила реальную точность измерений высот сильных и катастрофических наводнений Невы. Но уже в XVIII в. десятичные дюймы воспринимались, зачастую, и как обыкновенные ([25], [30] и др.).

Во-вторых, расхождения между аршинной и футовой (английской) линейными мерами (использованными, соответственно, И. Г. Лейтманом и Л. Эйлером, с одной стороны, и ими же и В. Л. Крафтом, с другой) лежат в пределах точности измерений XVIII в., оцениваемой, судя по Таблице 1, в пределах ±1 вершка (±4,44 см).

В-третьих, очевидна необходимость обоснования применения значений мер, принятых в XX в., к измерениям XVIII в. Соотношения между разноименными линейными мерами оставались неизменными с начала XVIII в. (1 сажень = 7 футам = 84 дюймам = 3 аршинам = 48 вершкам), тогда как значения самих мер изменялись по разным причинам (практические потребности; реформы XVIII–XIX вв.; уничтожение при пожаре в 1834 г. в Англии первичных государственных образцов мер). Сенатская Комиссия весов и мер 1736 г. приняла за основу при определении значения аршина и сажени полуаршин Петра I, хранившийся в Кунсткамере [31, с. 196], который, по измерениям Л. Эйлера, оказался больше $1^1/_6$ английского фута [32, с. 100]. Сажень, принятая в XVI–XVII вв., не совпадала с последующим ее значением, равным «7 английским футам, или 213,36 см метрической меры, а имела протяженность в 216 см и делилась на 3 аршина по 72 см каждый, или на 48 вершков по 4,5 см» [31, с. 86]. Но, по мнению Н. С. Шостьина, «остается невыясненным вопрос, была ли введена эта сажень во все отрасли хозяйства, или же только в некоторые. Замена существовавшей сажени (216 см) 7-футовой в общеобязательном порядке для всех отраслей хозяйства была бы связана с большими трудностями и расходами» [32, с. 100]. Очевидна необходимость архивных поисков материалов о применении конкретных мер и весов в различных отраслях практической деятельности.

Отметим также, что 21 марта (1 апреля) 1737 г. Ж. Н. Делиль[11] доложил Конференции Академии наук результаты измерения базиса будущей триангуляции по линии Петергоф — Дубки и сообщил о проведенном сличении английского и французского футов [13, с. 190]. Позднее было выполнено сравнение европейских мер с русскими — «аршином и кулем, полученными из Таможни» [33, с. 108].

Кроме того, не было нужды наносить футовые и дюймовые штрихи на деревянные уровнемерные рейки, снимавшиеся для ремонта каждый год (вследствие повреждений от штормов и льда), с предельной метрологической или практической точностями. На рис. 1 представлен такой измерительный «столб» — уровнемерная рейка (футшток) из статьи Л. Эйлера [9]. Вероятно, что градуировка шкал деревянных футштоков выполнялась с так называемой «обиходной точностью», вполне допустимой при измерениях колебаний уровней морей, озер, рек и, тем более, высот катастрофических наводнений. Однако, вопросы о значениях и неизменяемости меры, определявшейся на протяжении XVIII–XIX вв. с обиходной точностью, остаются неисследованными.

Еще большую роль в систематических искажениях уровнемерных наблюдений играют факторы, связанные с использованием неоднородных во времени и пространстве систем отсчета, утратами нуль-пунктов измерений, переносом пунктов наблюдений, заменой одних систем отсчета другими ([34], [35]). В качестве примера обратимся к Таблице 1, в которой сопоставлены наблюдения, выполнявшиеся в двух (точнее в трех) системах отсчета: 1) от ординарного уровня Невы,

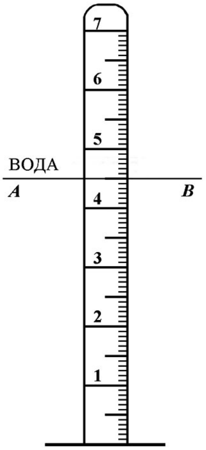


Рис. 1. Уровнемерная рейка (футшток), рекомендованная Л. Эйлером для регистрации приливов в полярных морях [9]. «Сия фигура представляет столб с учиненным на оном разделением на футы и дюймы, при чем числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 значат футы, а зделанныя на краю разделения – дюймы. Смотря на сей столб, можно всегда высоту воды описывать; как, на пример, ежели бы вода до линеи АВ простиралась, то б сию вышину весьма ясно мерою 4 футов и 6 дюймов назначить можно было» [9, с. 38]

предположительно определенного у Невских ворот Петропавловской крепости после 1715 г.; 2) от ординара у Горного института, где уровнемерные наблюдения были начаты в 1878 г.; и 3) в Балтийской системе высот (Кронштадтский футшток), введенной в практику астрономо-геодезических и гидрографических работ Постановлением Совета Министров СССР № 760 от 7 апреля 1946 г. В последней системе высот Р. А. Нежиховский [29] переопределил значения высот наводнений XVIII в., прежде редуцированные к ординару Невы у Горного института.

Метеорологические журналы Академии наук, в которых, согласно В. Л. Крафту ([20], [21]), записывались наблюдения 1726–1744 гг., до сих пор не обнаружены. Поэтому судить о месте производства наблюдений в первой трети XVIII в. можно лишь по косвенным сведениям. Согласно И. Г. Георги[12], после наводнения 1715 г. «замечаема была всегдашняя высота воды на валах» Петропавловской крепости ([36, s. 31], [37, с. 39]). И. Г. Лейтман приехал в Петербург 2 (13) июля 1726 г. и поселился на Петербургской стороне в «Синодальном» доме, уничтоженном, согласно [38, с. 32], наводнением 1 (12) ноября 1726 г., или сломанном позднее, согласно [39, с. 204], «за ветхостию». И. Г. Лейтман мог измерить высоту наводнения 1 (12) ноября 1726 г. и превышение уровня наводнения 1721 г. Однако, о регулярных наблюдениях «на валах» Петропавловской крепости нам ничего не известно.

Таким образом, нет оснований считать, что значительные расхождения между высотами, измеренными в XVIII в. и редуцированными к Балтийской системе высот 1946 г. (Таблица 1), свидетельствуют о недостатках этих систем. Во-первых, потому, что трудно предполагать «избирательные воздействия» на ординар XVIII в. у Петропавловской крепости между 1721–1725 и 1726–1729 гг., оставшиеся неучтенными И. Г. Лейтманом. Во-вторых, потому, что Р. А. Нежиховский даже не рассматривает нестабильность ординаров на интервале более 250 лет, вековые изменения уровней морей, озер и рек, деформации земной поверхности и современные движения земной коры. В этих условиях процедура редуцирования измерений, выполненных в неизвестной системе отсчета XVIII в., к системе отсчета XX в. не выдерживает серьезной критики.

В качестве единственного параметра, характеризующего силу наводнений (и размеры причиняемых ими убытков), до сих пор используются оценки максимальных высот уровня Невы над принятыми ординарами или нулями систем отсчета, в ряде случаев недостаточно обоснованные. Однако, одно и то же идеальное («эталонное») возмущение не могло бы генерировать наводнения Невы одинаковой высоты в одном и том же пункте наблюдений на интервале в 300 лет. Причины тому — существенные изменения природной и городской среды: эволюция циклонической активности и послеледникового поднятия Фенноскандии, тектонические и сейсмические процессы, движения земной коры и изменения геоида, вековые колебания уровней поверхностной и подземной гидросферы, изменения базиса эрозии Невы, а также антропогенные процессы, сопутствовавшие росту города за период от его зарождения до формирования современного крупнейшего мегалополиса в Балтийском регионе ([40], [41] и др.).

Увеличению максимальной высоты наводнений и смещению их максимумов вдоль Невы могли способствовать факторы, ограничивавшие диссипацию энергии наводнений на территории города и пригородов: поднятие и мощение тротуаров, улиц и площадей; гранитная облицовка берегов Невы, рек и каналов; расширение набережных за счет сужения их русел; перекрытие Лахтинского разлива, а также деформации оседания территории Санкт-Петербурга, сопутствующие росту строительных нагрузок и интенсивной эксплуатации артезианских вод гдовского горизонта, в результате которой в послевоенное время сформировалась пьезометрическая депрессия амплитудой около 60 м и радиусом более 100 км (в конце XX в. было принято решение об ограничении водопотребления).

Причины наводнений Невы

При рассмотрении причин и факторов, способствующих наводнениям Невы, И. Г. Лейтман и Л. Эйлер рассматривают: 1) время года, 2) ветры и 3) дождь ([2], [3], ч. 86–88). Мы перечислим эти факторы кратко, с использованием современной терминологии и в другом порядке, подчеркивая те положения, которые не потеряли своего значения и в настоящее время.

Для осени, во время которой наблюдается большинство наводнений, характерны: высокая циклоническая активность, большее число штормовых дней и дней с атмосферными осадками, повышенный уровень Балтийского моря, Невы, Ладожского озера и грунтовых вод. Причем уровень последних обычно стоит выше уровня соответствующих бассейнов, как это из «куриозной и экспериментальной физики увидеть можно» (капиллярные свойства грунтов).

При анализе ветров «надлежит смотреть как на страну, с которой ветр веет, от котораго в реке Неве большая вода прибывает, так и на море, на реку Неву, и Ладожское озеро». При этом требуется, чтобы первоначально южный ветер «к южно-западной стране обратился, и тако, чтоб в юге Восточное (Балтийское — *В. Б., Т. М.)* море от штурма наперед взволновалося, и оной штурм к южно-западной стране обратился». Только при такой смене ветров возникают условия, при которых в Санкт-Петербурге «великое наводнение чинится».

Конфигурация Финского залива также способствует тому, что «приходящая морская вода с толь большею силою против реки идет и оную удерживает». При этом «гнанная» юго-западным ветром вода удерживает «истечение» Невы. И поскольку Ладожское озеро расположено выше моря, то «чинится в Неве самое большее наводнение на том месте, где в низ текущая вода реки Невы прибывающей морской воде равною силою противляется», то есть между Санкт-Петербургом и Кронштадтом.

Представляет также интерес следующее примечание [3, с. 359]: «Однако же спорить неможно, что возвратное ударение от берегов, такожде Ладожское озеро знатно понудить может, что оное стремительно низтекает». Ибо юго-западный ветер сгоняет воду Ладожского озера к его северо-восточным берегам, отражение от которых усиливает напор вод Невы «противу ветра».

Нет сомнения, что авторы изложили общепринятую в Германии и Швеции в конце XVII – начале XVIII вв. панораму и последовательность проявления региональных факторов, приводящих к наводнениям в дельте Невы. Эти представления в дальнейшем неоднократно воспроизводились и переосмысливались в работах Х. Э. Геллерта ([11], [12]), В. Л. Крафта ([20, 21]), А. И. Нагаева[13] ([42, с. 450–454], [43, с. 72–74]), Ф. Ф. Шуберта[14] [44] и других исследователей, в том числе в XX в. Выяснение реальных связей циклонической активности и гидродинамического режима Северной Атлантики с синоптическими и гидрологическими процессами в Балтийском море способствовало отказу от «стоковой» гипотезы наводнений XVIII в. (выход из берегов Невы в результате напора нагонных вод), а также зарождению и развитию в XIX–XX вв. гипотез «длинной волны» М. А. Рыкачева[15] [45] и его последователей, «аномальных сейш» Т. П. Кравца и В. П. Дубова [16] ([46], [47]), «уединенной волны» Дж. С. Рассела[17] [48] (солитонной гипотезы [49]).

Дальнейшее изучение Невы и морских приливов

Ветер, по мнению Л. Эйлера, — недостаточная причина для объяснения наводнений, поскольку примечено, что «не токмо здесь и в протчих при Неве лежащих местах», но также «и в самом море зело далеко вода прибывает; к чему не един токмо ветр требуется». При этом он оценил, «что весма невеликое наводнение быть может, к которому самый жесточайший ветр, ежели оной на одном месте весма с верху на воду веет и на других местех воду гнать может», и существенно меньший эффект следует ожидать от ветра, который «зело косо, или оризонтально веет».

Здесь же изложены различные представления о природе приливов, статическая теория И. Ньютона и обсуждаются следствия, которые из нее вытекают применительно к Балтийскому морю. Последнее «при Копенгагене, как известно есть, чрез Зунд с Северным морем соединяется». Но поскольку приливы и отливы известны в Северном море, то вода «чрез Зунд проходить принуждена» и возвращаться. Такие же приливы и отливы наблюдались бы и в Балтийском море, если бы «сей пролив довольно пространен был и иных бы никаких препятствей небыло». Однако, в действительности проливы очень узки. «Сверх того и прибывшая вода в так малом времяни неможет во все места равно разделитися». Поскольку высокие приливы происходят во время «полно- и новомесячия», наибольшие — во время равноденствий, а наводнения Невы часты осенью, то, кроме перечисленных И. Г. Лейтманом трех причин, «такожде прилив и отлив немалою причиною здешняго наводнения быть могут».

И далее Л. Эйлер, впервые в России, пишет о необходимости создания региональной обсерваторской сети: «Но хотя сие мнение (о роли приливов в формировании наводнений Невы — *В. Б., Т. М.)* пред другими вероятнее быть кажется, то однакож не хотим мы оное за весма исправное почитать, пока случай будет оное не токмо по правилам математическим, но такожде по искуствам, которые на многих при Восточном море лежащих местах производить надлежало бы, лутче и подлиннее изследовать».

В дальнейшем Л. Эйлер часто интересовался теоретическими и практическими вопросами изучения приливов, в том числе в северных морях ([8], [9]). В 1780 г. директор Академии наук С. Г. Домашнев[18] создал Комиссию для изучения колебаний уровня и скорости течения Невы. В состав Комиссии были включены Л. Эйлер (руководитель и консультант), В. Л. Крафт, Н. И. Фусс[19], М. Е. Головин[20], И. А. Эйлер[21] (секретарь) ([50, с. 486–487], [51, с. 317]).

Заключительные замечания

В заключение отметим, что рассмотренная серия статей выдающихся членов Петербургской Академии наук — И. Г. Лейтмана и Л. Эйлера — предвосхитила многие направления последующих исследований природы и механизмов наводнений Невы, в том числе необходимость создания для этих целей единой обсерваторской сети и оценки размеров области повышения уровня в Финском заливе, интенсивно развивавшиеся в дальнейшем (Х. Э. Геллерт, В. Л. Крафт, А. И. Нагаев, Ф. Ф. Шуберт и др.). Это обстоятельство способствовало появлению в XIX–XX вв. гипотез «длинной волны» М. А. Рыкачева и его последователей, «аномальных сейш» Т. П. Кравца и В. П. Дубова, «уединенной волны» Дж. С. Рассела (солитонной гипотезы). Можно только сожалеть, что рассмотренная серия статей оставалась практически неизвестной специалистам на протяжении почти 280 лет.

Примечания:

[1] О повторном наводнении Невы 13 (24) октября 1729 г. известно по этому источнику.

[2] Общепринятое сокращенное название первого академического журнала.

[3] Сведения о членах Петербургской Академии наук воспроизведены по «Летописи Российской Академии наук» [13].

[4] Геллерт Христлиб Эрготт (Gellert Christlieb Ehrgott, 1713–1795) — физик, химик, адъюнкт по химии в Академии наук с 1736 по 1744 гг., затем профессор в Германии.

[5] Лейтман Иоганн Георг (Leutmann Johann Georg, 1667–1736) — механик, оптик, физик, профессор механики и оптики в Петербургской Академии наук с 1726 г.

[6] Крафт Георг Вольфганг (Krafft Georg Wolfgang, 1701–1754) — математик, астроном, физик, адъюнкт по астрономии с 1727 г., профессор математики и физики с 1731 по 1744 гг., секретарь Академии наук с 1730 по 1733 гг., иностранный почетный член Петербургской Академии наук с 1745 г.

[7] Миллер (Мюллер) Герард Фридрих, Федор Иванович (Müller Gerard Friedrich, 1705–1783) — историк, археограф, адъюнкт по истории с 1725 г., редактор журнала «Примечания на Ведомости», профессор с 1730 г., конференц-секретарь в 1728–1730 и 1754–1756 гг.

[8] Крафт Вольфганг Людвиг, Логин Юрьевич (Krafft Wolfgang Ludwig, 1743–1814) — адъюнкт по физике в Петербургской Академии наук с 1768 г., профессор экспериментальной физики с 1771 г., сын Г. В. Крафта.

[9] Приведем также другие свидетельства об этих наводнениях. 1) 5 (16) ноября 1721 г., Журнал Санкт-Петербургской крепости [26, л. 96]: «Была вода прибылая с моря в день великая которая во всех слободах також и в Питербурге в Крепости везде в Казармах и в протчих местах и в домех была а в Канцелярии была вышиною от полу на аршин от которой учинился великой убыток как Государственной також и народной и многих людей потопила». 2) 1 (12) Ноября 1726 г. Там же [26, л. 96]: «726$^{\underline{\text{го}}}$ году Ноября 1$^{\underline{\text{го}}}$ числа была болшая вода начала прибывать пополуночи в 7$^{\underline{\text{м}}}$ часу а убывать стала пополудни в 1$^{\underline{\text{м}}}$ часу и оной прибылой воды было в крепости на три четверти аршина и на два вершка». 3) Д. И. Языков в комментариях к «Запискам В. А. Нащокина» [27, с. 200–201] цитирует предыдущий текст, отнеся его ошибочно к наводнению 1721 г.: «Ноября 1 была большая вода; начала прибывать по полуночи в 7 часу, а убывать стала по полудни в 1 часу, и оной прибылой воды было в крепости на три четверти аршина и на два вершка». 4) 1726 г. 1 (12) ноября. Журнал А. Д. Меншикова [28, с. 473]: «Сей день был сильный ветр и вода прибывала с 6-го часа пополуночи и с 3-го часа пополудни убывала. И была против бывшей в 721-м году больше на поларшина» (Примечание составителей: «Описание наводнения записано очевидцем на отдельном листочке, а затем переписано в журнал»).

[10] Стевин Симон (Stevin Simon, 1548–1620) — голландский купец, математик, инженер.

[11] Делиль Жозеф Николя (Delisle, De L'Isle Joseph Nicolas, 1688–1768) — астроном, географ, геодезист, востоковед, профессор астрономии в Академии наук с 1725 по 1747 гг., иностранный почетный член Петербургской Академии наук с 1747 по 1748 гг.

[12] Георги Иоганн Готлиб, Иван Иванович (Georgi Johann Gottlieb, 1729–1802) — химик, медик, этнограф, путешественник, адъюнкт по химии в Петербургской Академии наук с 1783 г.

[13] Нагаев Алексей Иванович (1704–1781), ученый-мореплаватель, гидрограф и картограф, исследователь Балтийского и Каспийского морей, адмирал с 1769 г. Автор обобщения причин, вызывающих наводнения в дельте Невы.

[14] Шуберт Фридрих Теодор, Федор Иванович (Schubert Friedrich Theodor, 1758–1825) — математик, астроном, геодезист, адъюнкт по математике в Петербургской Академии наук с 1786 г., ординарный академик по математике с 1789 г., по астрономии с 1803 г. Автор обобщения причин, вызывающих наводнения в дельте Невы.

[15] Рыкачев Михаил Александрович (1840–1919) — капитан-майор флота, метеоролог, физик, директор Главной физической обсерватории, ординарный академик по Физико-математическому отделению (физика, метеорология) с 1900 г. Автор гипотезы «длинной волны» — основной причины наводнений в устье Невы.

[16] Кравец Торичан Павлович (1876–1955) — физик, историк физики, ученик П. Н. Лебедева, член-корреспондент АН СССР с 1943 г. Автор гипотезы о сейшевой природе наводнений Невы, подтвержденной и всесторонне обоснованной аспирантом Физико-математического института АН СССР В. П. Дубовым.

[17] Рассел Джон Скотт (Russell John Scott, 1808–1882) — выдающийся шотландский физик, гидролог, автор открытия и первых публикаций об «уединенной волне», ставшей прообразом современной теории солитонов.

[18] Домашнев Сергей Герасимович (1743–1795) — директор Академии наук в 1775–1783 гг.

[19] Фусс Николай Иванович (Fuss Nikolaus, 1755–1825) — адъюнкт по математике в Петербургской Академии наук с 1776 г., ординарный академик по высшей математике с 1783 г., непременный секретарь Конференции с 1800 по 1825 г.

[20] Головин Михаил Евсеевич (1756–1790) — адъюнкт по математике в Академии наук с 1776 по 1786 гг., почетный член Петербургской Академии наук с 1786 г.

[21] Эйлер Иоганн Альбрехт (Euler Johann Albrecht, 1734–1800) — математик, физик, астроном, член Берлинской Академии наук с 1754 г., профессор физики в Петербургской Академии наук с 1766 г., конференц-секретарь с 1769 по 1800 гг., старший сын Л. Эйлера.

Литература:

1. Санктпетербургские Ведомости. 1729. № 82, 14 октября. С. 330.

2. [*Leutmann J. G., Euler L.*] Ein Heftiger Sturm auf der See, welcher sich (den 12 October) um 10 Uhr Morgens anhub, und die Inseuln dieser Stadt mehreentheils unter Wasser setzte // Historische, genealogische und geographische Anmerckungen über die Zeitungen. St. Petersburg, 1729. № 86, 88–91. С. 437–440, 445–460.

3. [*Лейтман И. Г., Эйлер Л.*] Ради великаго штурма с моря, который (12 дня октября) в 10 часу пред полуднем восстал и острова сего города от прибывшей воды почитай все потопило, и протчая // Исторических, генеалогических и географических Примечаниев в Ведомостях части. СПб., 1729. № 86, 88–91. С. 345–348, 353–368.

4. *Савельева Е. А., Щербакова Т. П., Матвеева М. Н.* Историческая тематика в академической периодике XVIII в. // Философский век. Альманах. Вып. 11. Екатерина II и ее время. Современный взгляд. СПб., 1999. С. 177–297.

5. *Богданов В. И.* Сводный реестр публикаций 1728–1742 гг. Санкт-Петербургской Академии наук в журнале «Примечания на “Ведомости”». СПб., 2000.

6. [*Лейтман И. Г., Эйлер Л.*] О приливе и отливе, или о прибывании и убывании воды // Историческия, генеалогическия и географическия Примечании в Ведомостях, издаванные в Санктпетербурге при Академии наук с 1729 по 1740 год. Ч. 21. М., 1765. С. 169–192.

7. [*Лейтман И. Г., Эйлер Л.*] О прибывании воды в Неве реке и о приливе и отливе // Собрание географических, астрономических и физических примечаний. Ч. 1. СПб., 1787. С. 9–51.

8. [*Euler L.*] Von Beobachtung der Ebbe und Fluth des Meers // Anmerckungen bey den Zeitungen. St. Petersburg, 1740. № 9–10. С. 33–40.

9. [*Эйлер Л.*] О том, как должно примечать морской прилив и отлив // Примечаний на Ведомости ч. 9–10. СПб., 1740. С. 33–40.

10. *Невская Н. И.* Источники по истории астрономии XVIII в. СПб., 2000.

11. [*Gellert H.*] Vom Steigen und Fallen des Neva-Ströms // Anmerckungen bey den Zeitungen. St. Petersburg, 1741. № 47–48. С. 185–192.

12. [*Геллерт Х. Э.*] О прибывании и убывании воды в Неве реке // Примечаний к Ведомостям ч. 47–48. СПб., 1741. С. 185–192.

13. Летопись Российской Академии наук / Сост. и перев.: Е. Ю. Басаргина, Л. И. Брылевская, Ю. Х. Копелевич, А. Б. Кузнецова, Н. И. Невская, Е. П. Ожигова, Г. И. Смагина, С. Ю. Трохачев; Отв. ред.: Н. И. Невская. Т. I. 1724–1802. СПб., 2000.

14. *Копелевич Ю. Х.* Забытые страницы «Примечаний на Ведомости» // Наука и культура России XVIII в. СПб., 1984. С. 38–51.

15. СПбФ АРАН. Ф. 136. Оп. 1. Д. 121. Л. 1–3 об.

16. Систематический указатель статей, помещенных в периодических изданиях и сборниках Императорской Академии наук, а также сочинений, изданных Академиею отдельно, со времени ея основания по 1872 г. включительно. Ч. II. Сочинения на русском языке. СПб., 1875.

17. *Невская Н. И.* «Примечания на Ведомости» как научный журнал // Наука и культура России XVIII в. Л., 1984. С. 5–37.

18. *Krafft G. W.* Observationum Meteorologicarum, ab anno 1726 usque in finem anni 1736 factarum, comparatio. Praelectio prima // Comm. T. IX. Petropoli, 1744. P. 316–351.

19. [*Крафт Г. В.*] Краткое описание наидостойнейших примечания погод и разных воздушных перемен, бывших здесь в Санктпетербурге с начала 1726 до конца 1736 году // Примечаний на Ведомости ч. 70–75. СПб., 1738. С. 263–286.

20. *Krafft W. L.* Notices et remarques sur les débordemens de la Néva à St. Pétersbourg, accompagnées d'une carte représentant la crue et la diminution des eaux du canal de Kronstadt, pour chaque jour de l'année 1777 // Acta. 1777. St. Petersbourg, 1780. P. 39–62.

21. [*Крафт В. Л.*]. Известия и примечания г. Академика Крафта о разлитиях Невы в Санктпетербурге, с присовокуплением таблицы прибывания и убывания воды в Кронштадтском канале каждаго дня 1777 году // Новыя ежемесячныя сочинения. 1795. Ч. CIX. С. 37–50; Ч. CXI. С. 74–93.

22. Сводный каталог русской книги гражданской печати XVIII века, 1725–1800. Т. III. М., 1966.

23. *Богданов В. И.* О репрезентативном каталоге наводнений Невы как фундаментальной научной и практической проблеме (к 300-летию Санкт-Петербурга и Кронштадта) // Известия Русского географического общества. 2002. Т. 134. Вып. 6. С. 23–34.

24. *Беспятых Ю. Н.* Новая столица. Петербургские наводнения при Петре I // Санкт-Петербургский международный летний культурно-исторический университет 2006. Реформы в России. XVI – начало XX в. СПб., 2006. С. 34–64.

25. *Малова Т. И.* Анализ материалов о метках высот наводнений Невы в Невских воротах Петропавловской крепости // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове. 2006. № 218. С. 220–232.

26. Журнал Санкт-Петербургской крепости (1717–1725 гг.) // Библиотека Российской Академии наук (СПб), Отдел рукописей. Ф. 57. Д. 31.7.14. 131 л.

27. Записки Василия Александровича Нащокина / Под ред. и с предисл. Д. И. Языкова. СПб., 1842.

28. Повседневные записки делам князя А. Д. Меншикова 1716–1720, 1726–1727 гг. / Сост.: С. Р. Долгова, Т. А. Лаптева // Российский Архив (История Отечества в свидетельствах и документах XVIII–XX вв.). Вып. X. М., 2000.

29. *Нежиховский Р. А.* Вопросы гидрологии реки Невы и Невской губы. Л., 1988.

30. *Мордухай-Болтовской А. И.* Уровни некоторых Ленинградских наводнений XVIII и начала XIX века // Известия Государственного гидрологического института. 1932. № 48. С. 16–35.

31. *Каменцева Е. И., Устюгов Н. В.* Русская метрология. М., 1975.

32. *Шостьин Н. А.* Очерки истории Русской метрологии XI–XIX века. М., 1975.

33. *Невская Н. И.* Петербургская астрономическая школа XVIII в. Л., 1984.

34. *Богданов В. И.* Методологические аспекты изучения наводнений Невы // Астрономия и история науки. СПб., 1999. С. 113–127.

35. *Богданов В. И., Малова Т. И.* О системах счета высот в геодезии и отсчета измерений в метрологии уровнемерных наблюдений // Геодезия и картография. 2003. № 5. С. 11–16.

36. [*Georgi J. G.*] Versuch einer Beschreibung der Russisch Kaiserlichen Residenzstadt St. Petersburg und der Mercmüroligceiten der Gegend. Von Johann Gottlieb Georgi. Mit einem Plan und einer Karte. St. Petersburg, 1790.

37. *Георги Г. И.* Описание Российско-Императорскаго столичного города Санкт-Петербурга и достопамятностей в окрестностях онаго. СПб., 1794.

38. *Бренева И. В.* История Инструментальной палаты Петербургской Академии наук (1724–1766). СПб., 1999.

39. *Богданов А. И.* Описание Санктпетербурга / Подготовка текста: К. И. Логачева, В. С. Соболева, Э. Н. Филипова, Л. Н. Логачева. СПб.: Северо-Западная Библейская Комиссия и Филиал архива РАН, 1997.

40. *Богданов В. И.* На пути к фундаментальному обсерваторскому изучению вековых изменений в Санкт-Петербургском (Балтийско-Ладожском) регионе // Геодезия и картография. 2000. № 1. С. 21–26.

41. *Богданов В. И., Малова Т. И.* Проблема фундаментального обсерваторского изучения эволюции природных процессов на тысячелетних интервалах (на примере Северо-Западного региона России) // Труды V Международной конференции «Приборостроение в экологии и безопасности человека». СПб., 2007. С. 43–51.

42. *Берх В. Н.* Подробное историческое известие о всех наводнениях, бывших в Санкт-Петербурге // Записки Государственного Адмиралтейского департамента, относящиеся к мореплаванию, наукам и словесности. 1826. Ч. XI. С. 415–500.

43. *Головизнин К.* Наводнение 7 ноября 1824 года в Кронштадте // Морской сборник. 1881. № 7. С. 65–96.

44. *Шуберт Ф. Т.* Причины наводнения в С.-Петербурге 1824 г. // Русская старина. 1887. Т. XX. С. 708–714.

45. *Рыкачев М. А.* О наводнениях в С. Петербурге и о возможности их предсказывать на основании метеорологических наблюдений // Записки по гидрографии. 1898. Вып. XIX. С. 99–124.

46. *Кравец Т. П.* Новая теория происхождения Ленинградских наводнений // Труды по физике. М.; Л., 1959. С. 296–297.

47. *Дубов В. П.* Сейши Балтийского моря и связь их с наводнениями в Ленинграде // Труды Государственного гидрологического института. Вып. 5. 1937. С. 71–89.

48. *Scott Russell.* Report of Waves // Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science. London, 1845. P. 311–390, Pl. 47–57.

49. *Новокшенов В. Ю.* Введение в теорию солитонов. М.; Ижевск, 2002.

50. Протоколы заседаний Конференции Императорской Академии наук с 1725 по 1803 г. Т. 3. 1771–1785. СПб., 1900.

51. *Раскин Н. М.* Леонард Эйлер и И. П. Кулибин // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М., 1988. С. 304–320.

Aleksandar Petrovic
Belgrade, Republic of Serbia

The Meaning Behind Cartesian Wall (or How Euler Built St. Petersburg)

Аннотация: По прошествии почти трехсот лет кажется, что мы только начинаем по-настоящему понимать работы Эйлера. Хотя все его математические результаты являются неотъемлемой частью истории современной математики, его всеохватывающее воображение выходит за пределы монодисциплинарного подхода. Мы стремимся к более глубокому пониманию его функции «gradus suavitatis» и его общей теории музыки как prolegomena действительного исторического смысла понятия гармонии. Эта статья является попыткой наметить возможные пути такого исследования.

> "Like a Shakespearean sonnet that captures the very essence of love, or a painting that brings out the beauty of the human form that is far more than just skin deep, Euler's equation reaches down into the very depths of existence."
>
> Keith Devlin

The basic problem with the Leonhard Euler's music theory has been clearly expressed by Nicolas Fuss who said that "it did not have popular success due to the reason that there was too much geometry for a musician and too much music for a geometer". Such an opinion undoubtedly reflects not only the status of Euler's theory, but the basic structure of the Cartesian world which is divided into different domains — subjective and objective — grounded on Descartes' cognitive dissociation of *res cognitans* from *res extensa*. It was assumed that the distant subject and object should be studied autonomously and that the objects of study could be further divided into smaller parts thorough rational diversification of the scientific research. Holding such an opinion Descartes concluded that real science had to be limited to the mathematical investigation of the motion of the objects only. That was the corner stone on which the new *philosophia mechanica*, often named *the mechanical paradigm,* was built.

But the basic problem with Euler's theory of music, as mentioned by Fuss, at the same time is its main advantage. Although Euler's also worked on the perfection of the *philosophia mechanica*, his opus has some peculiar features which allow us to take it somehow dissonant towards the Cartesian and later Encyclopedic aims. The point of difference we find in his concept of harmony. Euler's examination of this matter with its persuasive clarity and holistic nature exceeds the limits of *philosophia mechanica*, enervated by the strong Cartesian subject — object polarization and Encyclopedic empirical reduction. For instance, D'Alemebert who "spoke from experience" asserted that "the words interval between sounds, equality and difference of intervals are only abbreviated figures of speech, which should not be given a wider meaning than they really have. Sounds are merely sensations, and consequently they do not in reality have any ratio with one another; sounds cannot be compared, any more than colours can; all that is needed is a little attention to hear this...” [1].

Euler’s theory therefore could be seen as an implicit reassessment of the XVII century epistemological dualism and empiricism. Reconsideration of his approach is indispensable because of the evidently present scientific difficulties in creating a single clear theory that simplifies and truly explains everything. This much-hoped-for theory is usually known as the *Theory of Everything* and its key expectation is that it will finally explain physics and it will do so via one *single unifying principle* in nature.

Present failure in finding a *single unifying principle* and the open epistemological gap allows reconsidering of Euler’s methodological load of the concept of harmony. Although nowadays this concept is not a very acceptable scientific idea (it reminds us of the previous, “obscure” paradigm, hermetic science with its view on congruence of opposite qualities), maybe it is worth rethinking harmony in its true (Platonic or Pythagorean) sense, especially because we can feel pulse of secular concept of harmony behind the figures that were previously called “gnomons” and are nowadays called “fractals”. Besides, exploration of harmony was one of the sources of the mathematical sciences of nature in the West.

Euler was 24 years old when he wrote, in 1731, his *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae* (*An attempt at a new theory of music, exposed in all clearness according to the most well-founded principles of harmony*). He was working on the papers on mathematical harmony for almost 60 years which signifies the depth of his devotion to this subject. He considered mathematical theory of harmony in about 30 of his published memoirs, and the importance of this subject to him is visible from the simple fact that he put it at the beginning of his *Letters to the German Princess*. It seems that this notion represents a firm basis of his interpretation of the world.

Euler contemplation on harmony is incentive for the present epistemology because it is devoid of the direct hermetic suggestions, contrary for instance to Kepler’s Neo-Platonic reflections which still more or less irritates mechanical science. First of all, Euler considers harmony in the frame of the mathematical theory of music. In a letter to Daniel Bernoulli (1731) he wrote: “My aim, in this work, has been to try to develop music as a part of mathematics and to derive in an orderly fashion, from the right foundations everything that a combination and a mixture of notes may make pleasing... In the whole discussion I have necessarily had a metaphysical basis, wherein the cause is contained why a piece of music can give one pleasure and the basis for it is to be located, and why a thing to us pleasing is to another displeasing.”

But how to perform such an arithmetical exercise and how to make a difference between sounds? Why some are kind and pleasant, and some are not? Euler was determined to find out what the order of sounds consists of. There are primarily two types of music orders determined according to what is called today the height or pitch (high or low), or according to the duration. Recognizing preeminence of height over that of the duration, since that one is measured by the frequencies of vibration, Euler brings back the evaluation of the musical pleasure to the arithmetic measurement of the proportions attached to the sounds. This metaphysical approach could be found in Greek Antiquity, and within the Renaissance Neo-Platonic and hermetic tradition that had based musical science on the theory of proportions. In *De suavitate et principiis har-*

moniae (*On the charms and principles of harmony*) Euler outlines a philosophical argumentation, in which, by the proportions, one arrives to musical pleasure, via order and perfection. In the medieval thought the term *suavitatis* has a clear theological sense. It is some kind of Speculum Anime, the mirror of the soul, as had been said, for instance, in one anonymous medieval manuscript *Reflecting the Royal Soul*. “Oculus non vidit, nec auris audivit, nec in cor hominis ascendit, quanta claritas, quanta suavitas, et quanta jucunditas maneat nos in illa visione, quando Deum facie ad faciem videbimus” (“No eye has seen, nor ear heard, nor heart of man experienced, such clarity, such kindness, and such pleasantness, as shall remain in us in that vision, when we shall see God face to face.”) [2]. The “mirror” is a metaphor of necessity to turn an attention from the visible, “fallen” world to the next of perfect proportions. *Suivitas* is therefore one of the metaphors which leads soul directly, or via helix, to God.

Following that perspective, Euler starts from the insight that “perfect music unites harmony and measure”. His real intention was to render visible the real origin of musical notes, with which musicians themselves are almost totally unacquainted. He was quite confident that the principles of harmony are ultimately reducible to numbers. In this he is very close to Leibniz who admitted that “Music is a recondite arithmetical exercise carried out by the soul, which is unaware that it is counting. Those who attribute only conscious operations to the soul, in truth, usually make a bad judgment. This has given rise to many errors, not only with philosophers of the past, but also with the followers of Descartes themselves, and with others who are more recent, such as [John] Locke and [Pierre] Bayle” [3].

The *suavitas* is the basis of Euler attempt to reach and to define a scale of “kindness” of the sound aggregates, which he names “gradus suavitatis”, i. e. “degrees of softness” (or maybe “degrees of amiability”, suavitates ingenii). Gradus suavitatis is for him the most perfect and the most stable ratio. “Let many different notes be taken, whose numeri pulsuum [numbers of beats], that occupy the same period of time, stand to each other as the whole numbers a; b; c; d etc., by which the same notes are usually expressed. Let A be the minimus communis dividuus [lowest common multiple]. I call this number the exponentem of the same notes, because it is on this basis that we recognise grace that is produced when the same notes are played either at the same time or in succession. I have thus devised a gradus suavitatis, the first of which includes the most perfect chord, that is to say, when all the notes are relatively equal. The following ones include the less perfect, according to their order” [4, p. 146–150].

In such a manner he tried to quantize frequency ratios, degree of stability (gradus suavitatis) and found a correlation between stability and two mathematical properties of the simplified pitch ratios: 1. Size of involved prime numbers (the smaller the prime factors of the numbers in the given ratio the more harmonic the ratio), 2. Number of exponents (the more divisible the numbers in the given ratio the more harmonic the ratio).

He defined first the gradus suavitatis function (Γ) as a number theory function. According to the theorem of dividing to simple factors, certain positive number *a* could be developed uniquely in the following form:

$$a = p_1 e_1 \cdot p_2 e_2 \cdot p_3 e_3 \ \dots \ p_n e_n$$

where $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$ is a growing series of simple numbers, and e_1, e_2, e_3,... e_n are positive whole numbers. Then, according to the definition, the gradus suavitatis is

$$\Gamma(a)=1+\sum_{k=1}^{n} e_k(p_k-1)$$

The equation

$$\Gamma\left(\frac{x}{y}\right)=\Gamma(x\cdot y)$$

is also valid. Here, $\frac{x}{y}$ is a positive previously reduced fraction.

Function $\Gamma(a)$ represents the level of kindness and could be applied on various musical phenomena, i. e. intervals, accords, rhythms, etc.

Because $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, then

$$\Gamma(60) = 1+ (2{\cdot}2 + 1{\cdot}3 + 1{\cdot}5) - (2 + 1 + 1) = 9,$$

i. e. number 60 has a value of kindness 9. Gradus suavitatis function for reduced fractions $\frac{a}{b}$ is resolved according to the relation

$$\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)=\Gamma(a\cdot b)$$

For instance, ratio 12 : 5 has also value of kindness 9.

Following this thought Euler offered one possible mathematical and philosophical approach which could "soften" subjectivity of subject and give certain objective quality to musical relations. Some ratios are more pleasant than others because harmony backed our relationship with the world of sounds. Demonstrating that harmony had certain natural, objective basis, he overcame the subjective approach by affirming that some frequencies ratios have pleasant quality *per se*, independent of the pure subjective experience.

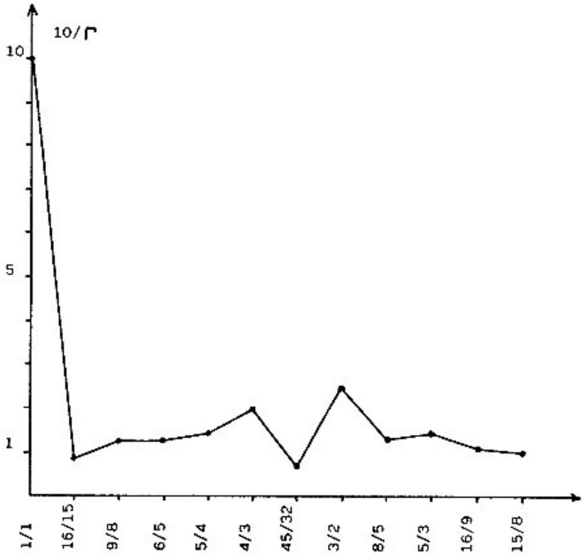


Fig. 1. One possible representation of the level of kindness (introduced as the function 10/Γ) of intervals within one octave. The factor 10 is a suitable scalar parameter [5]

For modern musicians his definition of harmony is too narrow — more or less they abandoned this approach because they prefer to express an unlimited subjectivity. On the other hand, science does not like the harmony because it corrupts hard, separated object and introduces a non-distant, influential observer. But from the non-Cartesian, critical point of view it is a good opportunity to diminish the epistemological tension between *res cogitans* and *res extensa*, taking the notion of harmony as a possible pattern of interdisciplinarity, as a way of integrating radically different methods ascribed to the comprehension of the natural and social world.

If we review the overall power of mathematics in Euler's description, the analysis and interpretation of music, it turns out that his concept of harmony has a unique unifying character: seemingly disparate subjects become related and comparable through the universal language of harmony. If we accept that philosophical/mathematical attitude, then possible physical Theory of Everything looks more or less needless or redundant like rediscovering a well known terrain.

Euler introduced the second level of comprehension of harmony by his famous expression $e^{\pi i} + 1 = 0$, "perhaps the most compact and famous of all formulas" (E. Kasner and J. Newman). This equation is the hidden harmony, because it links the most significant entities in mathematics: e (the base of natural logarithms), π (the ratio of the diameter to the circumference of a circle), i ($\sqrt{-1}$), 1, and 0.

He plugged imaginary exponents into functions involving the number e. The letter e stands for the transcendental number 2.71828..., the base of natural logarithms, the necessary constant in the only function that is its own derivative, or, in other words, the derivative of any function based on e is equal to itself. We can see e "as an embodiment of growth, each moment of which is in harmony with an evolving overall pattern". It also directly faces us with the idea of harmony delineated by many excellent mathematical concepts, from the domain of subjective perception, art and architecture, to the natural, objective processes of growing patterns of sunflowers, nautilus shells, animals, spiral galaxies, which all grow according to same principles that disclose simple mathematical relationships. As Kasner and Newman said, "it appeals equally to the mystic, the scientist, the philosopher, the mathematician. For each it has its own meaning" [6, p. 92]. Also Benjamin Peirce noted that this formula is "surely true, and it is absolutely paradoxical: we cannot understand it, and we don't know what it means, but we have proved it, and therefore we know it must be the truth" [6, p. 109].

Both his famous expression and his gradus suavitatis function give the possibility to think beyond the Cartesian divided world and to find a way where *res cogitans* and *res extensa* really correspond. Metaphorically speaking, gradus suavitatis could be taken as an energy, the mirror of a soul, and e-expression as a form, shell, and "we can begin to understand the meaning behind $e^{\pi i}$ as harmonious growth..." [7, p. 289]; or in modern terms, suavitatis is some kind of *soft*-ware and e-expression is *hard*-ware. The e opens unlimited spaces for natural an artificial object encounter, and Gradus fills these objects with meaning and links it with the conscious mind. Objects are "filled" with harmony which is an interface for the human world. This way, Euler's harmony enables the merging of the two separated domains, subjective and objective, and offers efficient instruments to exceed the present paradigmatic and epistemological limits. In simpler terms, the meaning behind Euler's formula is to "show how seemingly disparate elements are implicated in a unity, and do so concisely..." [8, p. 147].

If before mentioned could help us in reconstructing Euler's basic point of view, is that sufficient to understand the meaning behind the great admiration of Catherine the Great? Why Euler was so important to her, and how she embraced his work with her imperial aspirations? It is well known that Euler designed channels of St. Petersburg and was taking part in other public enterprises which somehow touched mathematics. Could it be said — if the Cartesian wall separating the subjective and objective worlds is removed, does $e^{\pi i}$ open the real historical world and helps its harmonious growth? Could we recognize the influence and the effect of the $e^{\pi i}$ formula in the city where Euler was creating so much? Constructed with the obvious European idea, and reflecting its best culture, St. Petersburg attracted Europe to Russia, and, at the same time, opened Russia to Europe. In it, the Europeans could recognize the forms of their time, and the Russians find enough space for their life. Dostoyevsky named it "the most artificial city in the world" in the time when New York was not built yet, and when St. Petersburg was the only urban pattern of the New World, later imitated by Washington, in detail and with all the necessary differences in style, architecture and urban layout. Pushkin, having in mind not only space but time as well, entitles it the "window to Europe". In such a way, St. Petersburg is the first town of the New World, and that is the right way in which Euler discovered America [9].

Opening that window Peter the Great began building a new bridge between the West and the East, because the old one on Hellespont, where Constantinople used to be, was destroyed a long time ago. Peter knew that the mere civil engineering art was not enough, and that a really great town can be erected only by a great idea. Instead of ruined Constantinople, Peteropolis was emerging, not only to rule over Russia, but also to make the connection between the East and the West which was missing for centuries, enlarging historical, cultural, political, and all other sorts of misunderstandings. If today it seems to us that Peter the Great did not succeeded in his mission, therefore it is natural for all sorts of neurosis to grow, because virtually nothing mediates the East and the West. The complexness of the problem can be seen by the depth of the silence surrounding it.

Euler came to St. Petersburg when Peter had already died, but his spirit and his task were more alive than ever. Euler spent thirty years in Petropolis, till his death (with the exception of the years 1741–1766 when he was working at the court of Prussian king Friedrich the Great). He worked relentlessly, sometimes finishing a new paper in only a few days, so he wrote 800 papers concerning pure and applied mathematics (about twenty papers mean an excellent efficiency of a modern mathematician). His collected works have 75 volumes and 25.000 pages.

From this, it's already clear why Euler is often regarded as the greatest mathematician of modern culture. But he is more than that — he is a great visionary of the mathematical bridge between the East and the West — the odd, contradictory, impossible, but indispensable joint. His mathematics, latent in the urban framework as well as in many great buildings of St. Petersburg, invokes an unity, lost a long time ago, and speaks of harmony which is to be preserved. Euler started from the very beginning — the fact that the accord of mathematics and music lies in the basis of the Western culture, as well as of some other cultures. That intimacy, which actuates everything, had to be the primary propelling force of the town, to be seen in the streets, as well as on the octaves and thirds of the buildings' frontages, inside their interiors, in parks, bridges — everywhere. Euler incorporated his inexhaustible spirit in the growing town, so it became the primary driving structure of the stone organism which was preparing itself to flourish. Walking through St. Petersburg, it is not difficult to see its reflections crystallized in the city's forms, still sparkling in the multitude of symbols appearing from every side. If somehow the impact of Euler's spirit could be extracted from the Polis of Peter, it would simply collapse, because there would be nothing steadfast enough to stand upon. Euler's work exceeds the existing frontiers of the subjective and objective, or any other duality which divides the world, portending harmony as the power of a universal meeting.

That's how Euler answered the main challenge of his stay in St. Petersburg — the relation between the East and the West. Nobody really achieved this yet, but we should recognize that Peter the Great was the one who was nearest to the solution. If we try to open, by the key of history, the function (although maybe apocryphal one) propounded to Diderot by Euler ("Sir, $\frac{a+b^n}{n}=x$, hence God exists, answer please!") it would reveal that the relation between the East and West can not be entirely solved, no matter how one parameter of the function is trying to exponentially rises its value. If someone incautiously tries to do so, he will disappear in the gap between the two, just as Diderot, according to the legend, had to leave St. Petersburg, unable to answer Euler's Sphinx question. The East and the West, as two fundamentally different principles, could only be mediated — one may search from the point of their balance only, not for the point of their touch. Peter and Catherine (the Greats) believed that the harmony of that point could be easily felt by mathematics and music. That is the key to understand the $e^{\pi i}$ formula, and St. Petersburg as well, and all that its builders tried to make.

References:

1. *D'Alembert J.* Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration (1747–1750) // HASBL Berlin, 1749. P. 214–249; 1752. P. 355–360.

2. *Field S. L.* Reflecting the Royal Soul: The Speculum Anime composed for Blanche of Castile//Mediaeval Studies. Vol. 68. 2006. P. 18.

3. Gottfried Wilhelm Leibniz to Christian Goldbach (1712) // Epistolae ad diversos. Lipsiae, 1734–1742. P. 239–242.

4. Commercium cum Johanne (I) Bernoulli and Nikolao (I) Bernoulli. LEOO IV A, 2.

5. *Canak M.* Phlogiston // Journal for the History of Science. Vol. 1. Belgrade, 1995. P. 81.

6. *Kasner E., Newman J.* Mathematics and the Imagination. Bell and Sons, 1949.

7. *Glasberg R.* Mathematics and Spiritual Interpretation: A Bridge to Genuine Interdisciplinarity // Zygon. Vol. 38. № 2. 2003.

8. *Crease R. P.* Equations as Icons // Physics World. 2007.

9. Sandfier E. How Euler Discovered America, How Euler Did It // MAA Online, www.maa.org.

Т. С. Полякова
Ростов-на-Дону, Россия

Леонард Эйлер и становление математического образования в России*

Аннотация: The article explores a less well-known aspect of the creative activity of Leonard Euler: his work with students and disciples and personal contribution towards the making of the unique and in many respects model system of mathematical education in Russia.

The article addresses to researchers in the field of the history of mathematics and education, to the lecturers and teachers of mathematics in higher and secondary educational institutions, to students of mathematical specialities and to all those who are interested in the past and present of their own mathematical education.

15 апреля 2007 г. исполнилось 300 лет со дня рождения одного из величайших математиков всех времен Леонарда Эйлера (1707–1783), деятельность которого на протяжении более полувека была связана с Россией. Несмотря на то, что Эйлер всю жизнь оставался гражданином Базеля[1], мы по праву, так же, как жители Швейцарии и даже Германии, считаем его своим соотечественником.

Уже его современники понимали величие этого человека. В знаменитой «Похвальной речи...» Эйлеру, произнесенной через полтора месяца после его кончины, академик Петербургской Академии наук, ближайший сотрудник и ученик Эйлера Николай Фусс предвидел, что «потомки совокупят его имя с именами великих мужей Галилея, Лейбница, Невтона и всех, кои разумом своим сделали честь роду человеческому...» [1, с. 375]. Мы, ныне живущие, являемся теми потомками, о которых говорится в этой речи, и можем с уверенностью утверждать, что прошедшие два с лишним столетия в полной мере подтвердили предвидение Фусса: имя Эйлера совершенно заслуженно заняло место в том ряду великих ученых, который выстроил его современник.

В этой же речи Фусс предрекает: «Имя его (Эйлера — *Т. П.*) пребудет в памяти, когда имена столь многих погребены будут в вечности забвения, кои мимотекущею славою обязаны суетности нашего века». Он оказался прав. Сама кончина Эйлера в сентябре 1783 г. была обставлена с надлежащим пиететом. Через несколько дней состоялось траурное заседание Конференции Петербургской Академии наук, в ноябре того же года на торжественном собрании академии Н. Фусс произнес пространную речь памяти своего учителя, небольшие фрагменты которой мы только что цитировали. В начале 1785 г. в зале заседаний академии против президентского кресла был установлен бюст Эйлера на мраморной колонне[2].

---

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта 05-03-03023а «Леонард Эйлер и математическое образование в России».

Посмертные почести, оказанные Эйлеру в России, были должным образом оценены западноевропейскими учеными. Знаменитый французский мыслитель и политический деятель, почетный член Петербургской Академии наук Ж. Кондорсе в речи, произнесенной во французской Академии наук, отметил: «Народ, который мы в начале этого века принимали за варваров, в настоящем случае подает пример цивилизованной Европе — как чествовать великих людей при жизни и уважать их память после смерти...»[3].

В течение почти трех веков после кончины Эйлера памятные даты, связанные с великим ученым, отмечаются в нашей стране юбилейными конференциями, симпозиумами и другими торжественными мероприятиями под эгидой Академии наук. За это время в России в рамках истории науки возникло направление, которое смело можно назвать эйлероведением. Достижениям Эйлера в области математики, естествознания и техники посвящены три главы фундаментального труда по истории отечественной математики [2]; его жизнь, творчество, математические труды, деятельность учеников и последователей освещена в шести главах книги знаменитого историка математики А. П. Юшкевича [3]; основой каждого раздела, посвященного математике и механике, первого тома «Истории Академии наук СССР» [4] является характеристика научных трудов Л. Эйлера, его коллег и учеников. Прекрасно изданы юбилейные сборники статей к 150-летию со дня смерти [5], 250-летию [6] и 275-летию со дня рождения [7]. Интересны и доступны научно-популярные издания преимущественно для юношества, специально посвященные Эйлеру ([8], [9]). Целые разделы выпусков фундаментальной серии «Историко-математические исследования» отданы часто очень обширным публикациям о великом ученом, например, выпуски VII и X ([10], [11]). Что касается статей, то их великое множество: строго научных, основанных на неиспользованных ранее архивных материалах; обзорных, посвященных отдельным направлениям творческой деятельности Эйлера, специальным его трудам; научно-популярных и пр.

Надо сказать, что трехсотлетний юбилей Л. Эйлера еще до этого события отмечен интересными публикациями. Так, под редакцией известного историка математики Г. П. Матвиевской в Оренбурге, где теперь функционирует ее историко-математическая школа, издана серия сборников научных статей с подзаголовком «К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера» [12]–[16]. Опубликована и наша книга «Леонард Эйлер и математическое образование в России» [17].

Несмотря на то, что имя Эйлера неразрывно связано с математикой, его творческая деятельность простирается далеко за ее пределы. Как известно, интересы Эйлера были связаны и с техникой, и с богословием, и даже с музыкой. Так, в 1739 г. им опубликован на латинском языке трактат «Опыт новой теории музыки, ясно изложенной на надежнейших принципах гармонии», который к 300-летнему юбилею переведен на русский язык и опубликован [18]. Справедливости ради надо сказать, что Эйлер воспринимал окружающий мир все же через призму математики.

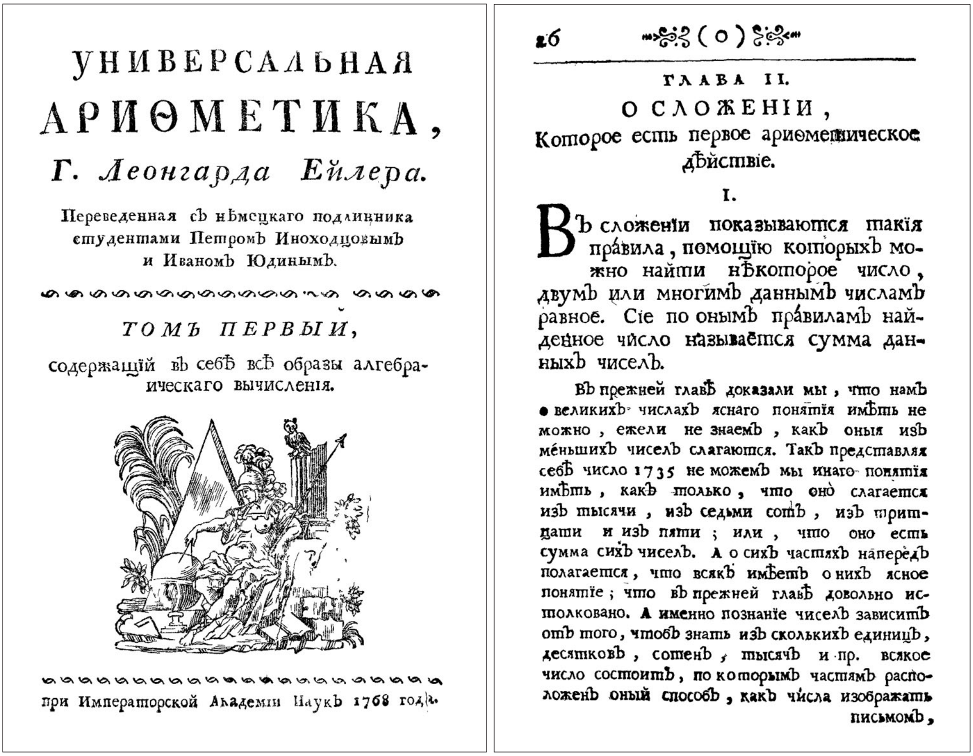
Наиболее значительная часть эйлероведения связана с его достижениями в области математики и смежных наук, в то время как он много и успешно занимался математическим образованием. Строго говоря, по приезде в Петербург и после получении должности адъюнкта ему была поручена не столько научная работа, сколько преподавание в гимназии и университете при Академии наук, которые составляли, как мы ее теперь называем, академическую образовательную систему. Он читал лекции студентам академического университета, принимал экзамены в академической гимназии и кадетском корпусе, составлял проект работы академической гимназии, писал учебники по арифметике и алгебре, в предисловиях к которым часто излагал свои методические воззрения. Многие его классические математические сочинения, особенно по дифференциальному и интегральному исчислению, написаны столь доходчиво и живо, что в течение длительного времени использовались в качестве учебников для университетов. Математическим образованием в академической образовательной системе Эйлер интересовался на протяжении не только всей своей деятельности в Петербурге, но и в качестве академика Берлинской Академии наук. В частности, он тщательно рецензировал многие работы воспитанников академического университета и непосредственно руководил занятиями С. К. Котельникова и С. Я. Румовского, подолгу живших у него дома в Берлине и ставших впоследствии академиками Петербургской Академии наук.

Более того, мы считаем, что им создана первая в России методическая школа, т. к. его ученики и последователи были не столько учеными-математиками, сколько преподавателями математики, организаторами математического образования, авторами учебников математики, в которых были реализованы преимущественно методические идеи их великого учителя.

Несмотря на столь значительные заслуги Эйлера перед отечественным математическим образованием, насколько нам известно, практически не существует публикаций, специально освещающих эту грань его творческой деятельности. Можно назвать лишь небольшую персональную главу в книге «Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков» В. Е. Прудникова [19], обзорную работу А. П. Юшкевича о роли Эйлера в математическом просвещении в научно-методическом журнале «Математика в школе» [20] и статью Е. С. Кулябко под названием «Педагогические воззрения Леонарда Эйлера» [21], в которых не просто бегло перечислено всё, что им сделано в области математического образования, но и раскрыты некоторые педагогические и методические идеи, которые воплощались Эйлером в практической педагогической деятельности и созданных им учебниках математики. Даже во вступительной речи министра образования РСФСР И. Ф. Образцова на открытии симпозиума «Развитие идей Эйлера в современную эпоху», посвященного 275-летию со дня рождения великого ученого, перечислены лишь вопросы, изучаемые студентами высших учебных заведений и связанные с научными достижениями Эйлера. Его же «Универсальная арифметика» названа в качестве учебника, «значительно повысившего уровень математического просвещения» [22]. И только. Это говорит о том, что даже на таком высоком министерском уровне педагогическая и методическая деятельность Эйлера не могла быть оценена по достоинству, прежде всего в силу того, что она просто не была предметом специального исследования.

Можно выделить по меньшей мере следующие проблемы, связанные с ролью Эйлера в истории развития математического образования и не нашедшие своего разрешения в эйлероведении:

— педагогическая и методическая деятельность Эйлера не вычленяется из общей характеристики его творчества, излагается несистематически, фрагментарно;



УНИВЕРСАЛЬНАЯ
АРИѲМЕТИКА,
Г. Леонгарда Ейлера.
Переведенная съ нѣмецкаго подлинника
студентами Петромъ Иноходцовымъ
и Иваномъ Юдинымъ.

ТОМЪ ПЕРВЫЙ,
содержащій въ себѣ всѣ образы алгебраическаго вычисленія.

при Императорской Академіи Наукъ 1768 года.

26 (о)

ГЛАВА II.
О СЛОЖЕНІИ,
Которое есть первое ариѳметическое дѣйствіе.

I.

Въ сложеніи показываются такія правила, помощію которыхъ можно найти нѣкоторое число, двумъ или многимъ даннымъ числамъ равное. Сіе по онымъ правиламъ найденное число называется сумма данныхъ чиселъ.

Въ прежней главѣ доказали мы, что намъ о великихъ числахъ яснаго понятія имѣть не можно, ежели не знаемъ, какъ оныя изъ меньшихъ чиселъ слагаются. Такъ представляя себѣ число 1735 не можемъ мы инаго понятія имѣть, какъ только, что оно слагается изъ тысячи, изъ седьми сотъ, изъ тритцати и изъ пяти; или, что оно есть сумма сихъ чиселъ. А о сихъ частяхъ напередъ полагается, что всякъ имѣетъ о нихъ ясное понятіе; что въ прежней главѣ довольно истолковано. А именно познаніе чиселъ зависитъ отъ того, чтобъ знать изъ сколькихъ единицъ, десятковъ, сотенъ, тысячъ и пр. всякое число состоитъ, по которымъ частямъ расположенъ оный способъ, какъ числа изображать письмомъ,

Рис. 1. Титульный лист и начало главы о сложении «Универсальной арифметики» Леонарда Эйлера

— не проведен анализ места математического образования в академической образовательной системе, в которой нашли приложение педагогические и методические таланты великого ученого;

— не выделено в качестве фундаментального фактора развития математического образования такое уникальное явление отечественной интеллектуальной истории, как методическая школа Леонарда Эйлера;

— не показана внутренняя динамика развития методических идей, продуцированных и развиваемых в рамках этой первой в истории России методической школы.

Эти обстоятельства и побудили нас инициировать еще одно, безусловно, не основное, но важное для истории математического образования направление эйлероведения, связанное с изучением педагогической и методической деятельности Эйлера, соответствующих его воззрений, с оценкой его вклада в отечественное образование, прежде всего, математическое.

По нашему мнению, это особенно важно сейчас, когда под угрозой находится историческая память нашего народа, идет процесс ее разрушения; когда зачастую считается хорошим тоном подвергать сомнению даже самые высшие проявления национального духа. К высшим проявлениям национального духа относится, по глубокому убеждению автора, и отечественное математическое образование, которое имеет уникальную историю, характеризующуюся поразительным динамизмом.

В начале XVIII в. в области математического образования Россия отставала от развитых стран Европы практически на полтысячелетия, однако уже к концу XIX в., по крайней мере, гимназическое математическое образование в нашей стране отвечало европейским стандартам, вошло на равных правах в международную классическую систему школьного математического образования. В середине XX в. «эффект спутника» напрямую связывают с качеством советской модели образования, прежде всего математического. В конце же его высококвалифицированные отечественные математики заполнили образовательные учреждения развитых стран мира. И этим фрагментом «монументальной», по определению Ницше[4], истории России мы не вправе пренебрегать в заботах о сохранении исторической памяти народа.

Более того, с каждым годом усиливается впечатление, что делаются попытки разрушить не только историческую память нашего народа, но и эталонную, по мнению многих компетентных профессионалов, систему отечественного математического образования. Не так давно издана книга с «говорящим» названием «Образование, которое мы можем потерять», где представлены статьи выдающихся ученых-математиков и педагогов нашей страны, имеющих неоспоримый и высочайший авторитет в мире, Ж. И. Алферова, В. А. Садовничего, Д. В. Аносова, В. И. Арнольда, Л. Ж. Кудрявцева, И. Ф. Шарыгина. В предисловии к ней ректор МГУ В. А. Садовничий говорит об уникальности отечественной системы образования, «пока еще одной из лучших в мире. Пока еще...» [23]. Основное внимание в книге обращается на все усиливающиеся попытки разрушения в нашей стране прежде всего математического образования.

В таких условиях особенно важными представляются исследования, в которых показывается, какие невероятные сложности были преодолены, какие мощные интеллектуальные силы России задействованы в процессе создания отечественной системы математического образования. Первые, самые трудные этапы[5] этого процесса связаны с именем великого Эйлера. Подробно они освещены в подготовленной нами монографии «Леонард Эйлер и математическое образование в России» [17]. В этой статье мы только кратко охарактеризуем решение тех проблем, которые выделены нами несколько выше.

История отечественного математического образования начинается в самом начале XVIII в. с создания Петром I, который совершенно справедливо считал это образование одним из основных рычагов радикальных преобразований страны, профессиональной образовательной системы. При его непосредственном участии были открыты математико-навигацкая (1701), цифирные (1714) и гарнизонные (1716) школы, надолго обеспечившие доминирование математического образования в государственной системе обучения подрастающего поколения.

Учителя математики и создатели учебных пособий первоначально были приглашенными из-за рубежа в первом (А. Д. Фарварсон со товарищи) или во втором (Я. В. Брюс) поколениях. Очень быстро ведущие позиции занимают отечественные преподаватели математики: Феофан Прокопович, Леонтий Магницкий, учителя математики цифирных и гарнизонных школ, специальная подготовка которых отсутствовала. Учителями математики становились преимущественно самоучки или лица, окончившие математико-навигацкую, реже — другие типы созданных в этот период школ.

Учебная математическая литература этого периода представлена математическими таблицами (умножения, логарифмов, синусов, тангенсов и секансов), малораспространенными и плохо пригодными для обучения книгами И. Ф. Копиевича, а также «Арифметикой» Л. Ф. Магницкого и учебниками геометрии Я. В. Брюса. Отличительной особенностью ее является то, что она специально создавалась для определенной образовательной системы — в нашем случае для математико-навигацкой школы, входящей в качестве подсистемы в профессиональную образовательную систему — и реализовывала идею контекстного обучения математике.

Создание в конце первой четверти XVIII в. по инициативе Петра I Петербургской Академии наук, имевшей твердый государственный бюджет, явилось продолжением патерналистских традиций государства уже над наукой, в том числе математикой; сочетание ею исследовательских и учебных функций обеспечило впоследствии патронат математики над математическим образованием всех уровней.

Подбор академиков-математиков для Петербургской Академии наук был чрезвычайно удачным. В Петербург приехали преимущественно представители самой передовой в то время в Западной Европе научной математической школы братьев Бернулли.

Все это создало достаточно благоприятные условия для развития математики и дальнейшего становления математического образования в России.

На таком достаточно оптимистичном фоне в Петербургскую Академию наук из Швейцарии приглашается совсем еще молодой Леонард Эйлер, которому суждено в течение длительного времени оказывать решающее влияние на развитие математики в России. В несколько меньшей мере — на развитие отечественного математического образования, преимущественно в рамках созданных при академии университета и гимназии, которые мы называем академической образовательной системой. Охарактеризуем вкратце педагогическую и методическую деятельность Л. Эйлера в академической образовательной системе.

Деятельность Эйлера в академическом университете и гимназии

Надо признать, что большинство академиков не слишком ревностно относились к своим обязанностям, особенно связанным с преподавательской деятельностью. Эйлер же проявил себя прекрасным и очень добросовестным педагогом. Вот как он сам характеризует выполнение такого рода обязанностей в отчете, написанном 28 августа 1737 г. по требованию президента академии И. А. Корфа ко всем академикам: «По условиям своей службы в Императорской академии наук я обязан был выполнять следующее: ... 2. Читать студентам лекции по высшим разделам математики. Это я также всякий раз, как объявляются такие студенты, которые желают обучаться этому предмету, по их возможностям исполняю»[6].

Так, в каталоге университетских лекций указывается:

— за 1732 г.: «Л. Эйлер, профессор теоретической и экспериментальной физики, имея поручение преподать физику, намерен излагать по понедельникам, средам и четвергам теорию физики, а по пятницам иллюстрировать теорию опытами»;

— за 1734 г.: «Леонард Эйлер, профессор высшей математики, от двух до трех часов пополудни будет излагать ученикам курс математики».

В 1738 г. Эйлер читал публичные лекции по логике и высшей математике. На них приглашались, кроме студентов университета, слушатели Морской академии, Сухопутного шляхетного корпуса и других школ. С просветительской целью Эйлер писал научно-популярные статьи для «Примечаний» к «Петербургским ведомостям»[7].

Но особенно большое внимание в первый период пребывания Эйлера в Петербурге он уделял академической гимназии.

Так, Эйлер участвовал в работе комиссии, учрежденной в 1737 г. для улучшения работы гимназии. Им представлена пространная записка, в которой предложен *проект системы обучения*. Охарактеризуем ее основные принципы в современной терминологии.

1. Преемственность между гимназическим и университетским образованием. «Главная задача гимназии, — писал Эйлер, — приготовить университетских слушателей, и весь учебный план должен получить направленный к этой цели характер»[8].

2. Прагматический характер обучения. Прохождение полного курса гимназии Эйлер считал необязательным, полагая, что можно прекращать занятия, если учащийся приобрел достаточные для его будущей профессии знания.

3. Бессословность и бесплатность обучения. Доступ в гимназию, по мнению Эйлера, должен быть открыт всем, а обучение должно быть бесплатным, так как в этом заинтересовано, прежде всего, само государство. Однако он признавал необходимость отдельного обучения дворян и детей всех прочих сословий: «...те, которые не то чтобы бедные, — писал Эйлер, — но происходят из низкой черни, получают плохое воспитание и обычно имеют скверные нравы. Поэтому представляется необходимым сделать различие в месте для сидения, либо каким-нибудь другим образом, так, чтобы хорошо воспитанные не имели общения с плохо воспитанными и не могли бы подпасть под дурное влияние» [4].

4. Единая десятилетняя продолжительность обучения с разделением на 5 двухгодичных классов. Возраст учащихся — от 5 до 15–16 лет.

5. Необходимость создания учебников, соответствующих возрасту и развитию гимназистов.

Л. Эйлер предложил и свой проект программы гимназического курса. Прежде всего, он включал в него изучение языков — латинского как международного научного языка того времени (впрочем, Эйлер предостерегал от чрезмерного увлечения латынью) и немецкого, так как он был родным языком многих учителей гимназии.

После языков основополагающее значение Эйлер отводил математике. «За языками, — писал он в проекте переустройства гимназии, — следуют математические науки, из которых элементарные и наиболее необходимые в обычной жизни должны основательно изучаться в гимназии. Из их изучения не только каждый извлечет большую пользу, какую бы деятельность он впоследствии ни выбрал, но основательный и верный метод преподавания просветит его разум и сделает его способным во всех науках отличать недосказанное от твердо усвоенного, истинное от ложного» [24, с. 248]. По обычаям того времени, полагаясь на волю монарха больше, чем на логические аргументы, Эйлер добавляет: «Кроме того, безусловное приказание ее имп. Величества гласит, чтобы было уделено особое внимание преподаванию решительно всем ученикам арифметики и геометрии» [24, с. 249].

Итак, Эйлер считал, что из математических дисциплин в гимназии при Петербургской Академии наук прежде всего должны изучаться *арифметика и геометрия.* Кроме этих разделов математики, по мнению Эйлера, целесообразно специально изложить *учение о шаре,* так как оно необходимо «для отчетливого понимания географических карт и исторической географии». Причем в преподавании математики Эйлер впервые в отечественном школьном образовании пришел к необходимости не только заучивать правила и применять их при решении задач, но и, по мере возможности, приводить их логические обоснования.

Требования к учебникам математики. Понимая, что успехи преподавания во многом зависят от учебников, Эйлер считал необходимым повысить их качество, изложив в проекте переустройства академической гимназии требования к ним:

1. «Арифметика должна преподаваться по хорошему учебнику; молодежи следует не только сообщить простые правила арифметики, но, по мере возможности, приводить обоснования этих правил...».

2. «Подобным же образом обстоит дело с геометрией, которую следует основательно изучать с помощью хорошего учебника. Первоначально надо сообщить ученикам определения и показать геометрические фигуры, а затем перейти к теоремам и доказательствам».

3. «...необходим также хороший учебник по тригонометрии, в котором должны быть изложены основы тригонометрии и описаны различные способы измерения и вычисления фигур».

4. «...потребуется также учебник о шаре; в этом учебнике должно быть дано математическое объяснение различным природным явлениям Земли, климатам и временам года» [29, с. 248–249].

Итак, в проекте преобразования академической гимназии Эйлер охарактеризовал основополагающее значение математики в гимназическом образовании, вычленил основные математические дисциплины и сформулировал требования к учебным пособиям по этим дисциплинам.

*Судьба проекта***.** Кроме языков и математики в программу гимназического образования Эйлер включил каллиграфию, историю, географию, рисование и — дань дворянскому воспитанию — танцы.

Проект, представленный комиссией, был чрезвычайно прогрессивным для того времени, во многом предвосхищая реформы гимназического образования, проведенные только в начале XIX в. К сожалению, он не был утвержден[9] и поэтому во многом оказался неосуществленным.

Однако ту часть проекта, реализация которой зависела только от него самого, Эйлер с присущей ему энергией начал осуществлять. Речь идет о создании учебных пособий по математике. По словам Н. Фусса, он «...не вменял себе за унижение трудиться над сочинением, которое было ниже сил его, но важно по намерению, с которым было написано» [1, с. 358].

Развитие Эйлером школьных математических дисциплин

Эйлер выдвигает *чрезвычайно прогрессивные методические принципы* гимназического преподавания математики (подробнее см. далее), основной из которых на современном языке можно охарактеризовать как *сочетание принципов* *научности и доступности*. Он отвергает как чисто практические курсы математики, так и излишнюю формализацию в изложении математических дисциплин, которая была присуща, в частности, учебным пособиям популярного в то время немецкого математика и педагога Христиана Вольфа. В этом отношении Эйлер близок к французской школе учебной математической литературы, наиболее яркими представителями которой являются А. Клеро и знаменитый энциклопедист Ж. Даламбер: они предпринимали энергичные попытки соединить «простоту и общедоступность обучения математике с большей или меньшей точностью и убедительностью доказательств» [25, с. 18].

Кроме того, Эйлер минимизировал количество математических дисциплин, ограничив их число арифметикой, алгеброй, геометрией и тригонометрией, и был сторонником систематического изложения соответствующих дисциплин. Эти идеи Леонард Эйлер воплотил в ряде учебных пособий по математике, написанных специально для школьного ее изучения преимущественно в академической гимназии.

По арифметике Эйлер написал «Руководство к арифметике для употребления в гимназии Императорской Академии наук». К сожалению, пособие осталось незавершенным из-за отъезда Эйлера в Берлин. Это пособие явилось прототипом всех последующих отечественных, а возможно и не только отечественных, учебников арифметики.

Эйлеровское учебное пособие *по алгебре* известно в отечественной литературе как «Универсальная арифметика». Несмотря на то, что его математическое содержание значительно превосходит потребности школы того времени, прекрасный отбор материала и, особенно, доступный язык изложения сделали это пособие одним из самых популярных для своего времени. Эйлер задумал «Универсальную арифметику» как книгу, по которой читатель мог бы самостоятельно изучить основы алгебры. Существует легенда-быль[10], что сделать это ему удалось уже в процессе написания книги. Потеряв зрение, он надиктовывал книгу по алгебре мальчику-слуге, не имевшему понятия о математике. В процессе работы над книгой мальчик не только понял все, что диктовал ему великий слепой, но в скором времени был в состоянии самостоятельно завершать все самые трудные вычисления и решать задачи, которые ему предлагались.

Эйлер намеревался написать учебник по элементарной *геометрии*, который, по всей видимости, все же не был им написан. Сохранившиеся фрагменты говорят о том, что Эйлер стремился сочетать научность изложения с его доступностью. Учебник по *тригонометрии* Эйлер также не написал. Однако именно он создал современную теорию тригонометрии, разработав не только высшие ее разделы, но и те, которые изучаются в школе. До Эйлера тригонометрические функции не рассматривались единым образом как функции числового аргумента — рассматривались тригонометрические линии в круге произвольного радиуса, не было ясности в вопросе о знаках синуса, косинуса и тангенса в зависимости от четвертей круга, не существовало единых обозначений. Подавляющее большинство теорем доказывалось не в общем виде, а, преимущественно, на основе наглядных соображений.

Эйлер впервые:

— рассматривает синус, косинус и тангенс как функции произвольного аргумента (в том числе комплексного);

— вводит круг единичного радиуса, что упростило все формулы;

— решает вопрос о знаках тригонометрических функций;

— выводит формулы приведения для углов, больших 90°;

— упрощает все записи, введя единообразные обозначения тригонометрических функций;

— систематизирует «формульную тригонометрию», отправляясь от нескольких основных формул.

Итак, вне зависимости от того, имеется ли учебник Эйлера по конкретной математической дисциплине, содержание школьного математического образования в России в течение почти трех столетий в немалой степени строилось «по Эйлеру».

Обобщим. Эйлер, не считая ниже своего достоинства серьезно заниматься проблемами математического образования, регулярно читал публичные лекции в академическом университете, курировал обучение его студентов в Берлинском университете, особенно большое внимание уделял академической гимназии, выполняя педагогические и методические функции: активно преподавал в ней в первый период своего пребывания в России, разработал проект обучения, сформулировал требования к учебникам математики и некоторые прогрессивные методические принципы, минимизировал количество учебных математических дисциплин, написал и опубликовал учебники по арифметике и алгебре, сделал попытку создания учебника геометрии, сохранившегося во фрагментах в рукописном варианте, создал современную теорию тригонометрии, которая изучается в школе.

Но главное, но нашему глубокому убеждению, заключается в том, что Эйлером основана первая в истории России математико-методическая школа.

Мы считаем, что во второй четверти XVIII в. возникло и стало играть все возрастающую роль в развитии математического образования явление *надсобытийное,* не имеющее официально признанного статуса, определенной формы, более того, по сути своей неформальное. Речь идет о явлении сугубо интеллектуальном, уникальном, практически единственном в истории отечественного математического образования — о *методико-математической школе*[11], основателем которой явился Леонард Эйлер. Это явление во многом и относительно *надвременное*, ибо, имея четкие временные границы снизу (начало педагогической деятельности Эйлера), оно очень сложно ограничивается сверху: идеи методической школы Эйлера развивались весь XVIII в. и во многом продолжали сохранять свое значение в XIX в.

Заметим, к тому же, что название, данное нами этому явлению, достаточно условное, в определенной мере внеисторическое, так как методика математики как наука родилась значительно позже. Все же по сути это явление методико-математическое. Поэтому, понимая всю приблизительность этого названия, мы остановились именно на нем.

Первый историограф Академии наук П. П. Пекарский так писал о роли учеников и последователей Эйлера в развитии математического образования в России: «Безошибочно можно сказать, что нынешнее преуспеяние математических наук в наших учебных заведениях много обязано Академии наук, так как Эйлер, умирая, оставил семь даровитых последователей, считавших за честь себе называться его учениками и бывших не только кабинетными учеными, но и лучшими наставниками в тогдашних учебных заведениях Петербурга» [26, с. LXIII]. Из них, по крайней мере, С. К. Котельников, С. Я. Румовский, М. Е. Головин и Н. И. Фусс оставили заметный след в истории российского математического образования. Они и составили костяк общепризнанной методической школы Эйлера [27, с. 15–18]. Ее можно считать первой методической школой России, так как Л. Ф. Магницкий практически был методистом-одиночкой. Более того, единственный из его учеников [28, с. 55] и последователей Н. Г. Курганов развивал не только методические идеи Магницкого, но и методики Эйлера, и, фактически, принадлежит к методической школе последнего. К ней можно отнести и первого ученика Эйлера Василия Адодурова, который сначала делал заметные успехи, но потом переключился на работу переводчика (он, в частности, перевел с немецкого знаменитое эйлеровское «Руководство к арифметике...») и на создание русской грамматики. К методической школе Эйлера причисляют и еще одного академика, Гурьева. Он, хотя и не был его непосредственным учеником, много сделал для улучшения математического образования [29, с. 83], в частности, опубликовал книгу «Опыт о усовершении елементов геометрии», которая, как мы считаем [30, с. 64], является первым вышедшим в России и даже в Европе методическим сочинением.

Охарактеризуем подробнее глубокое влияние учебников и научных трудов Эйлера на создание отечественной учебной литературы по математическим и связанным с ней наукам. Его «Руководство к арифметике...» положительно отразилось на преподавании *арифметики*, во многом благодаря популярным учебникам преподавателя Морского кадетского корпуса Н. Г. Курганова. «Универсальная арифметика» Эйлера стала прообразом всех последующих школьных учебников *алгебры*, начиная с Н. И. Фусса и Т. Ф. Осиповского (XVIII – начало XIX вв.) и кончая А. П. Киселевым (XX в.). М. Е. Головин издал «Плоскую и сферическую тригонометрию с алгебраическими доказательствами» на основе оригинальных научных мемуаров и книг Эйлера, посвященных *тригонометрии*.

Во втором томе перевода «Сокращений первых оснований математики» Христиана Вольфа (СПб., 1771) С. К. Котельников представил первое на русском языке изложение *введения в анализ,* а также *дифференциального и интегрального исчислений*, в основе которого лежали фундаментальные исследования Эйлера. Труды Эйлера по *механике* явились основой другого учебника Котельникова — «Книга, содержащая в себе учение о равновесии и движении тел» (СПб., 1774).

Сочинения Эйлера по *математическому анализу и аналитической геометрии* служили классическими образцами для составителей учебных руководств по этим предметам. Представляется крайне затруднительным перечислить отечественных и зарубежных авторов учебников, черпавших материалы из научных трактатов Эйлера. Невозможно удержаться от соблазна привести в этой связи знаменитую фразу, приписываемую Лапласу: «Читайте, читайте Эйлера, он — наш общий учитель».

В заключение обобщим методические идеи Эйлера, которые мы частично уже охарактеризовали ранее.

1. Достаточно четкое выделение в школьной математике арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии, которые в дальнейшем становятся общепризнанным классическим набором дисциплин для средней школы и получают название *элементарной математики*.

2. Создание учебников по некоторым из этих дисциплин, где материал излагается *систематически*, т. е. таким образом, чтобы математические предложения образовывали стройную систему, в основе которой лежат *логические доказательства*, а также разумно сочетаются *теория и практика*.

3. Преодоление схоластики и формализма, господствовавших в доэйлеровских учебниках математики: оптимальное сочетание *научности и доступности* в изложении материала.

В наших книгах [17], [31], [32] дана более подробная характеристика деятельности в области математического просвещения в России учеников и последователей Эйлера. Сосредоточив внимание на их роли в отечественном математическом образовании, мы не сочли возможным ограничиться только ею, считая необходимым кратко характеризовать и другие стороны их интеллектуальной деятельности. Заметим, что это поколение выдающихся деятелей математического образования относится к интеллектуальной элите того времени, имеющей широкие интересы во многих сферах науки и культуры.

Не ограничиваясь преподаванием математики во всех типах школ того времени и созданием учебников математики, представители методической школы Эйлера активно занимались научной и научно-организационной (Котельников, Румовский, Фусс), просветительской и популяризаторской (Курганов, Котельников, Румовский, Фусс), учебно-организационной (Курганов, Котельников, Румовский, Головин) деятельностью. Эйлер и Котельников, кроме того, авторы оригинальных проектов гимназического образования.

Интеллектуальный потенциал представителей методической школы Л. Эйлера был настолько значителен и многогранен, что широко использовался для подпитки других сфер российской культуры, в частности, гуманитарной сферы. Так, Н. Г. Курганов создал знаменитую «Российскую универсальную грамматику» («Письмовник»), представлявшую собой своеобразную энциклопедию для широких слоев читателей. С. Я. Румовский и С. К. Котельников, являясь академиками Академии русского языка и словесности (Российской Академии), принимали самое активное участие в составлении первых в истории России академических словарей; С. К. Котельников опубликовал Софийский и Воскресенский списки Новгородской летописи; С. Я. Румовский издавал академические календари, исторические журналы, обобщил сведения о законодательстве России, ввел в научный оборот тексты таких ценнейших исторических источников, как «Русская правда» Ярослава Мудрого, «Судебник» Ивана Грозного.

Итак, начиная со второй четверти XVIII в., фундаментальным фактором развития отечественного математического образования становится методическая школа Л. Эйлера, расширившая патерналистские традиции математического образования, заложенные Петром I и заключающиеся в государственном над ним патронате, за счет включения патроната науки. Зона действия этого фундаментального фактора чрезвычайно широка — практически все образовательные системы, функционирующие в это время.

Примечания:

1. Сыновья Эйлера приняли русское подданство, значительное количество его потомков живет в России [33, с. 42].

2. В архиве Академии наук сохранилось оригинальное художественное произведение — силуэты работы Фридриха Антинга (1780-е годы) «Группа академиков, устанавливающих бюст Л. Эйлера», которое сохранило для истории это событие. В качестве иллюстрации оно публикуется во многих книгах, посвященных истории науки (например, [4, с. 315]).

3. Цитируется по: [9, с. 33].

4. Ницше различает три рода истории — монументальную, описывающую «все великое для создания столь же великого»; антикварную, которая отражает «благоговейное» отношение к прошлому, его консервацию даже в мелком, ограниченном; критическую, то есть «судящую и осуждающую» [34].

5. Этапы развития отечественного математического образования подробно охарактеризованы в нашей книге [31, с. 13–16].

6. Цитируется по: [28, с. 51]

7. См.: [19, с. 54].

8. Цитируется по: [24, с. 561].

9. Такая же участь постигла проект устава академической гимназии, представленный позже ее инспектором Г. Крафтом.

10. Она первоначально изложена в «Похвальной речи...» Н. Фусса [1] и в предисловии Бернулли к ее французскому переводу.

11. В качестве аналога можно привести, пожалуй, только методическую школу академика А. Н. Колмогорова в последней четверти XX в.

Литература:

1. Похвальная речь покойному Леонгарду Эйлеру, сочиненная на французском языке и читанная в собрании академии октября 23 дня Николаем Фусом // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М., 1988. С. 353–382.

2. История отечественной математики. В 4-х тт. Т. 1. Киев: Наукова думка, 1966.

3. *Юшкевич А. П.* История математики в России. М.: Наука, 1968.

4. История Академии наук СССР: В 3-х тт. Т. 1. М.; Л., 1958.

5. Леонард Эйлер: Сб. статей и материалов. К 150-летию со дня смерти. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935.

6. Леонард Эйлер. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1958.

7. Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988.

8. *Котек В. В.* Леонард Эйлер. М.: Учпедгиз, 1961.

9. *Яковлев А. Я.* Леонард Эйлер. М.: Просвещение, 1983.

10. ИМИ. М., 1954. Вып. VII.

11. ИМИ. М., 1957. Вып. X.

12. Из истории математики XVIII века. Сб. статей. Вып. 1 / Отв. ред. Г. П. Матвиевская. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2000.

13. Из истории математики XVIII века. Сб. статей. Вып. 2 / Отв. ред. Г. П. Матвиевская. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2001.

14. Из истории математики XVIII века. Сб. статей. Вып. 3 / Отв. ред. Г. П. Матвиевская. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2002.

15. Из истории математики XVIII века. Сб. статей. Вып. 4 / Отв. ред. Г. П. Матвиевская. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2004.

16. Из истории математики XVIII века. Сб. статей. Вып. 5 / Отв. ред. Г. П. Матвиевская. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2006.

17. *Полякова Т. С.* Леонард Эйлер и математическое образование в России. М.: КомКнига, 2007.

18. *Эйлер Л.* Опыт новой теории музыки, ясно изложенный в соответствии с непреложными принципами гармонии / Пер. с лат. Н. А. Алмазовой. Отв. ред. Н. П. Казанский. СПб.: Нестор-История, 2007.

19. *Прудников В. Е.* Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков. М.: Учпедгиз, 1956.

20. *Юшкевич А. П.* Леонард Эйлер и математическое просвещение в России // Математика в школе. 1983. № 5. С. 71–74.

21. *Кулябко Е. С.* Педагогические воззрения Леонарда Эйлера // Леонард Эйлер. М. 1958. С. 557–568.

22. Вступительные речи на открытии симпозиума «Развитие идей Л. Эйлера в современную эпоху» // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 5–14.

23. Образование, которое мы можем потерять. Сб. статей / Под общ. ред. В. А. Садовничего. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова; Институт компьютерных исследований, 2002.

24. *Белый Ю. А.* Об учебнике Л. Эйлера по элементарной геометрии // ИМИ. М., 1961. Вып. XIV. С. 237–284.

25. *Юшкевич А. П.* Математика и ее преподавание в России XVII–XIX вв. // Математика в школе. 1947. № 4. С. 17–30.

26. *Пекарский П.* История императорской Академии наук: В 2-х тт. Т. 1. СПб., 1870.

27. *Ланков А. В.* К истории развития передовых идей в русской методике математики. М.: Учпедгиз, 1951.

28. *Копелевич Ю. Х.* Эйлер — член Петербургской Академии наук // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 47–59.

29. *Гнеденко Б. В.* Очерки по истории математики в России. М.; Л.: ОГИЗ, 1946.

30. *Полякова Т. С.* Зарождение отечественной методики математики на рубеже XVIII–XIX вв. // Математика в школе. 2000. № 9. С. 61–65.

31. *Полякова Т. С.* История отечественного школьного математического образования. Два века. Кн. I: Век восемнадцатый. Ростов н/Д: Изд-во РГПУ, 1997.

32. *Полякова Т. С.* История математического образования в России. М.: Изд-во МГУ, 2002.

33. *Юшкевич А. П.* Леонард Эйлер. Жизнь и творчество // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 15–46.

34. *Ницше Ф.* О пользе и вреде истории для жизни // Сочинения в 2-х тт. Т. 1. М.: Мысль, 1997. С. 158–229.

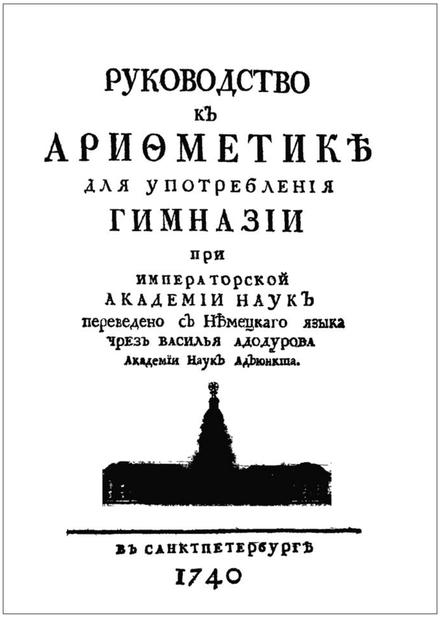
В. М. Бусев
Москва, Россия

«Руководство к арифметике» Леонарда Эйлера

Abstract: Leonard Euler is the author not only of numerous scientific works but also some textbooks on mathematics for Academic gymnasium. One of them — *Handbook on Arithmetic for Use in the Gymnasium of the Emperor's Academy of Sciences* — was the first example of Russian mathematical literature to contain a thorough grounding in theory instead of merely describe prepared algorithms. For each subject-matter, Euler explained in detail the origin of any rule, then went on to examine it in use. The *Handbook on Arithmetic* greatly infuenced all later textbooks both in Russia and in Europe.

Введение

Л. Эйлер оставил после себя не только научные труды; он написал также ряд учебных книг по математике, предназначавшихся для воспитанников академической гимназии. Первая из этих книг называется «Руководство к арифметике для употребления гимназии при Императорской Академии наук» [1].



РУКОВОДСТВО
КЪ
АРИѲМЕТИКѢ
ДЛЯ УПОТРЕБЛЕНІЯ
ГИМНАЗІИ
при
ИМПЕРАТОРСКОЙ
АКАДЕМІИ НАУКЪ
переведено съ Нѣмецкаго языка
чрезъ ВАСИЛЬЯ АДОДУРОВА
Академіи Наукъ Адъюнкта.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ
1740

Рис. 1. Титульный лист «Руководства к арифметике для употребления гимназии при Императорской Академии наук»

Вообще курс арифметики Эйлер представлял состоящим из четырех частей:

1) действия над целыми положительными числами и дробями;

2) именованные числа;

3) арифметические правила, которые применяются при решении задач (тройное, товарищества и др.);

4) десятичные дроби, извлечение корней, логарифмы.

К сожалению, написаны были только первые две части, которые составили соответственно две книги «Руководства к арифметике». Остальное не было выполнено в связи с отъездом Эйлера в 1741 г. в Берлин.

Мы расскажем о первой книге «Руководства», которая носит название «О первых арифметических действиях в целых и ломаных числах».

Каким видится Эйлеру обучение математике

В предисловии Эйлер пишет: «Число арифметических книг, которыя в разных государствах на свет изданы, так велико, что многим сей труд мог бы весьма ненужен показаться» [с. I] (здесь и далее страницы указаны по [1] — *Прим. ред.*). Однако перевод книг вызвал бы «превеликия затруднения», поскольку пришлось бы исправлять массу недостатков. Эйлер пишет об этих книгах так: «Ибо содержат оне или одни только правила со многими при них положенными примерами, а основании, на котором те правила утверждаются, не упоминается в них ни одним словом; или хотя праведныя основания сея науки в некоторых руководствах и показываются, однакож так трудным и непонятным образом, что ежели кто к математическому порятку не привык, тому не можно почти того и выразуметь...» [с. II]. Он недоволен и тем, что авторы руководств не заботятся о том, чтобы проводить вычисления наиболее простым и удобным способом.

Эйлер считает, что арифметика не должна предлагаться без доказательств и обоснований, поскольку без них она неприменима во всех случаях и не оказывает должного влияния на развитие ума. Поэтому он решил изложить в «Руководстве» основания всех правил и арифметических действий, но сделать это настолько ясно, чтобы всякий желающий мог разобраться в существе дела.

Эйлер полагает, что понимание правил будет способствовать тому, что учащиеся смогут решать не только стандартные задачи, но будут в состоянии разобраться и в необычной ситуации. Он замечает, что сознательное обучение арифметике займет не больше времени, чем если втолковывать правила без объяснения: «Всяк понимает то скоряе и гораздо лехче в памяти содержит, чего основание и начало ясно усматривает, и притом может оное при всех случаях лучше употребить в свою пользу» [с. IV]. Обоснования правил важны еще и потому, что большую часть своего учебного времени гимназисты тратят на языки, которые предполагают заучивание большого количества материала. Размышление же остается в стороне. Этот изъян гимназического образования и призвана ликвидировать арифметика.

Дополнительные сведения о взглядах Л. Эйлера и его учеников на обучение математике и организацию математического образования можно найти в [2] и [3].

Десятичная нумерация

Глава I («О арифметике вообще») носит в первой своей части методологический характер. Эйлер определяет арифметику как науку, которая «показывает свойство чисел, и притом подает некоторыя правила, способныя к исчислению или решению наибольших в общем житии случающихся задач» [с. 1]. Поскольку арифметика является частью математики, то Эйлер считает необходимым сказать несколько слов о математике вообще. Главную черту этой науки он усматривает в том, что все математические задачи сводятся к нахождению «незнаемых» количеств с помощью «знаемых». Стало быть, арифметика, которая имеет дело с числами, показывает, как с помощью арифметических действий по данным числам находить неизвестные. По Эйлеру, арифметика состоит из двух частей: первая посвящена записи чисел и действиям над числами, вторая — установлению на основе свойств действий правил для нахождения неизвестных.

Эйлер определяет число как «многия части одного рода», находящиеся вместе, и переходит к объяснению десятичной нумерации. Он показывает, что можно пользоваться и другими системами нумерации — римской или изображать числа с помощью палочек, но такие способы счисления неудобны. Эйлер подробно останавливается на принципе поместного значения цифр; дает названия классов; показывает, как читаются числа, записанные в десятичной системе счисления.

Подводя итог сказанному, Эйлер определяет счисление как способ выговаривать и записывать числа и говорит, что счисление «почитается обыкновенно за первое арифметическое действие» [с. 22]. Однако с этим он не согласен, для Эйлера арифметическое действие — это «особливой способ, как из двух или многих данных чисел производить новое».

Сложение и вычитание целых чисел

В главе II «О сложении, которое есть первое арифметическое действие» Эйлер не дает определения операции сложения, но поясняет ее смысл: «В сложении показываются такия правила, помощию которых можно найти некоторое число, двум или многим числам равное. Сие по оным правилам найденное число называется сумма данных чисел» [с. 26]. Далее он подводит читателя к мысли о том, что узнать сумму двух чисел — это значит найти из какого числа единиц, десятков, сотен и т. п. состоит эта сумма. Поэтому для начала необходимо научиться складывать единицы с единицами, сотни — с сотнями и т. д. «И понеже 10 единиц сочиняют один десяток, 10 десятков одну сотню, 10 сотен одну тысячу, и так далее: то надобно в сложении, когда больше 9 единиц, десятков, сотен и пр. случится, оныя относить к числам большаго звания...» [с. 28]. Так как сложение производится поразрядно, то все случаи сложения сводятся к умению прибавлять к числу единицы (от 1 до 9). Более того, все действия сводятся к действиям над однозначными числами. Эйлер приводит таблицы сложения для сумм от 1 + 1 до 9 + 9, после чего возвращается к правилу поразрядного сложения чисел. Разбирая сложение чисел 5326 и 4937, он не дает алгоритма нахождения суммы (например, в столбик), а проводит все вычисления словесно. Наконец, после рассмотрения нескольких примеров формулируется правило, согласно которому числа нужно писать друг под другом, а затем отделять чертой. Эйлер разбирает два примера, используя запись столбиком. Все примеры расписаны и словесно.

Следующая задача, помещенная в конце главы, является типично «эйлеровской». «А. Геллий упоминает, что стихотворец Гомер жил за 160 лет прежде создания города Рима; Рим построен до рождества Христова за 752 года; а от рождества Христова до сего времени прошло 1739 лет: Вопрошается, за сколько лет перед сим жил стихотворец Гомер?

Отвечай: от Гомеровых лет до сего времени прошло 160 лет, да 752 года, да еще 1739 лет, которыя три числа вместе сложенныя производят требуемое число лет...» [с. 45]. Далее Эйлер вычисляет в столбик сумму и пишет: «Сумма: 2651 год; за столько лет перед сим жил стихотворец Гомер».

Главу III «О вычитании, которое есть второе арифметическое действие» Эйлер строит аналогично предыдущей. Сначала он поясняет, в чем состоит смысл вычитания, и формулирует задачу нахождения десятичной записи разности. Прежде чем перейти к решению этой задачи, он говорит о связи между сложением и вычитанием и дает (мимоходом) определение вычитания: «И так когда даны два числа, то показывает вычитание, как такое число находить, которое вместе с меньшим числом делает большее число» [с. 49]. Вычитание предлагается осуществлять поразрядно, для чего потребуется уметь вычитать из двузначных чисел, не превосходящих 19, числа, не превосходящие 10.

Эйлер разбирает пример нахождения разности чисел 56897 и 21506; рассуждения он сначала проводит словесно, а затем дает запись (в столбик). Нетрудно заметить, что в данном случае не происходит заема единицы из большего разряда. Это — более сложный вид вычитания, к объяснению которого Эйлер тут же и приступает. Следующие 16 страниц книги посвящены примерам, в которых вычисления записываются в столбик и даются параллельные словесные объяснения. Запись практически не отличается от современной: только точки, обозначающие заем, ставятся не над цифрами, а рядом. В конце главы обращается внимание на «великое оное сходство» между сложением и вычитанием, которое позволяет одним из этих действий проверять результат выполнения другого.

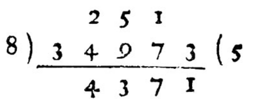
Умножение и деление целых чисел

В начале главы IV «Об умножении, которое есть третье арифметическое действие» Эйлер говорит о том, что сложение и вычитание являются первичными арифметическими действиями; но есть и вторичные: «Такое свойство имеет и умножение, по тому что в оном показывается, как некоторой особливой род надлежащих до сложения вопросов гораздо способнее решить можно, нежели только через одно сложение» [с. 76]. Автор дает определения множимого и множителя и обращает внимание на их равноправность (коммутативность умножения). Естественно, как и раньше, начинать изучение новой операции применительно к маленьким числам. Эйлер дает таблицу умножения, однако замечает, что полезно знать ее на память.

В дальнейшем изложении широко используется распределительный закон умножения. Сначала Эйлер показывает, как нужно производить поразрядное умножение на однозначное число. После подробных объяснений формулируется правило, которое тут же применяется к умножению 3596 на 7. Объяснение, как всегда, словесное и с записью столбиком. После нескольких примеров показывается, как произвести умножение на степень 10, а затем на число с нулями на конце. Затем Эйлер переходит к общему случаю умножения многозначных чисел; в результате разбора примеров появляется правило, которым мы пользуемся и по сей день. Эйлер рассматривает некоторые частные случаи: когда на конце многозначного числа нули и когда нуль находится в одном или нескольких разрядах множителей (тогда алгоритм упрощается).

В главе V «О делении, которое есть четвертое арифметическое действие» Эйлер дает два определения деления: 1) разделить — значит найти, сколько раз одно из данных чисел содержится в другом; 2) разделить — значит осуществить деление на столько равных частей, сколько содержит делитель. Как и умножению, делению предшествуют обстоятельные рассуждения, имеющие целью показать, в чем состоит смысл операции в первом и во втором случаях. В результате рассуждений Эйлер приходит к выводу, что «обе от нас на деление положенныя дефиниции между собою согласны» [с. 115]. Он вводит понятия делимого, делителя и частного и замечает, что деление нацело может быть выполнено не всегда (в этом Эйлер видит сходство деления с вычитанием). Далее он пишет, что для успешного выполнения деления необходимо научиться делить числа, не превосходящие 81, на числа, не превосходящие 9, и приводит таблицу деления.

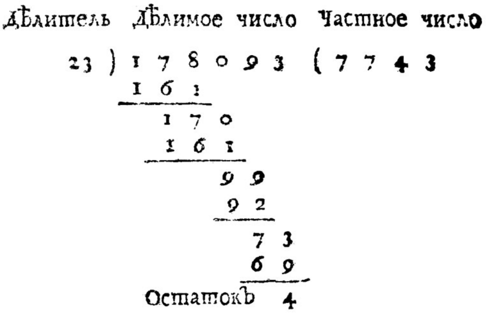
При делении на однозначный делитель снова используется распределительный закон: «Как в умножении искомое произведение находится, когда все части множимаго числа умножаются множителем, а потом все оныя особливыя произведения складываются вместе: так и в делении искомое частное число находится, когда все части делимаго числа делятся на делителя, а потом все оныя особливыя частныя числа складываются» [с. 133]. Прежде чем дать алгоритм, Эйлер приводит несколько примеров, которые снова разбираются словесно. Запись деления в столбик отличается от нынешней, но не сильно. Пример на деление 34973 на 8 выглядит у Эйлера так:



Делитель записан слева от делимого, справа — остаток, снизу — частное. Цифры 2, 5 и 1 появляются в процессе деления. Итак, сначала делим 34 на 8, получаем 4 и 2 в остатке, 4 пишем снизу (первая цифра частного), 2 сверху. Теперь раздробляем 2 в единицы следующего разряда (получаем 20) и прибавляем 9, получаем 29. Это число снова делим на 8, будет 3 (вторая цифра частного) и 5 в остатке (пишем сверху). Продолжая так далее, получим частное и остаток.

Эйлер дает упрощенный способ деления на однозначное число с нулями и демонстрирует его на примере деления числа 156327 на 700. В каждом из чисел он отбрасывает последние две цифры и делит 1563 на 7; получается 223 и в остатке 2. Для получения истинного результата нужно теперь к остатку дописать отброшенные от делимого цифры, получим 227. Итак, результат деления — 223 и 227 в остатке. Эйлер приводит обоснование этого способа.

Когда делитель есть двузначное число, то деление выполняется и записывается очень похоже на то, как мы это делаем теперь. «Яснее покажется сие от следующаго примера, в котором число 178093 делится на 23» [с. 145].



При промежуточных вычислениях Эйлер рекомендует делать прикидку. Например, сразу видно, что 23·8 = 184 > 178, поэтому первая цифра частного будет 7. Удобно пользоваться прикидкой так. Допустим, требуется разделить 178 на 23. Делим сначала 178 на 20 (или 17 на 2), а потом 178 на 30 (или 17 на 3). В первом случае получим 8, во втором 5. «Но понеже прямой делитель 23 подходит ближе к первому делителю, то и прямое частное число должно быть ближе к 8 нежели к 5; которое и подлинно найдено 7» [с. 150].

Глава заканчивается 14 страницами примеров и подробных решений.

Ломаные числа или дроби

В главе VI «О ломаных числах и о их свойствах вообще» Эйлер определяет дробь как частное от деления одного числа на другое, когда деление нацело невозможно. Он приводит в качестве примера деление 17 на 5 и показывает, что частное должно быть больше 3, но меньше 4. Далее вводится обозначение дроби и дается новое определение ломаного числа как собрания частей целого. Как обычно, знаменатель показывает, на сколько частей делили, числитель — сколько таких частей взяли. Эйлер обращает внимание на эквивалентность обоих определений.

Он формулирует и обосновывает правило сравнения дробей с единицей, т. е. по сути рассматривает правильные и неправильные (по нынешней терминологии) дроби. Затем совершается естественный переход к выделению целой части из неправильной дроби; Эйлер дает правило и показывает обычный способ записи смешанного числа. Результат изъятия целого числа он называет «целое число с долями». Зачем же нужно уметь выделять целое число из ломаного числа? «И так получается чрез сие действие ясное понятие о ломаном числе, потому что таким образом познавается, сколько оно содержит целых чисел, и какия еще при этом находятся в нем доли» [с. 176].

Эйлер формулирует основное свойство дроби, которое поясняет примерами, а затем делает попытку его обоснования: «Но явно есть, что сколько раз знаменатель ломаного числа содержится в числителе, столькож раз и двойной знаменатель в двойном числителе содержится...» [с. 184]. После рассмотрения примеров Эйлер говорит о несократимых дробях, а затем показывает, как можно с помощью последовательного сокращения дроби привести ее к несократимой. Тут закономерно возникают признаки делимости. Эйлер формулирует признаки делимости на 2, 4, 8, 5, 10, 3, 9 и 6. По поводу признака делимости на 7 он замечает: «Но чтоб узнать, делится ли какое число на 7, или нет, на то лучшаго правила дать не можно, как только что то надобно отведывать через подлинное деление» [с. 188]. Все признаки Эйлер обосновывает и показывает, как применять их к сокращению дробей.

Однако, пишет он, эти признаки не всегда позволяют сократить дробь. Для таких случаев требуется другой способ нахождения числа, на которое делятся и числитель и знаменатель. Так появляется общий делитель, а затем и «большой общий делитель» (наибольший, как мы теперь говорим). Для нахождения последнего Эйлер предлагает пользоваться алгоритмом Евклида (словесное описание которого занимает целую страницу). После формулировки правила он дает определения чисел «неразделимых» (простых), «делимых» (составных), «равных» (четных), «неравных» (нечетных) и «между собою неразделимых» (взаимно простых). Сокращение дроби Эйлер называет «уменьшением», несократимые дроби — «неуменьшимыми». После разбора примера на применение алгоритма Евклида следует обоснование этого алгоритма.

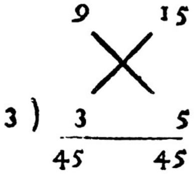
Необходимость «уменьшения» дробей Эйлер мотивирует так: «Чем меньше те числа, которыми ломаное число изображается, тем лучше и яснее можно себе силу и содержание ломанаго числа представить» [с. 204].

Четыре действия с ломаными числами

Глава VII «О сложении и вычитании ломаных чисел» открывается правилом, согласно которому найти сумму целого и дробного числа — это все равно что записать их рядом (целое перед дробью). Эйлер подчеркивает, что это правило следует из соглашений об изображении ломаных чисел и потому «никакого дальнаго доказательства не требует» [с. 211]. Следующий шаг — сложение дробей с одинаковыми знаменателями.

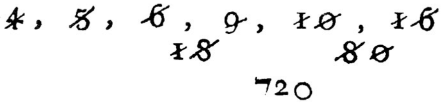
При вычитании смешанных чисел Эйлер показывает, как в случае необходимости от уменьшаемого брать единицу и раздроблять ее в соответствующие доли вычитаемого, чтобы вычитание было осуществимо.

Подводя итог сказанному, он замечает, что дроби с разными знаменателями просто так складывать и вычитать не получится: «Но присем должно прежде всего примечать то, что таких долей инако нельзя ни складывать, ни вычитать, ежели они к одинаким знаменателям приведены не будут, а когда то зделается, тогда уже никакой трудности больше не будет» [с. 223]. Но для этого «потребно» некое «предуготовление». Оно, как нетрудно догадаться, есть небольшая глава арифметики о наименьшем общем кратном, которое Эйлер называет меньшим общим делимым. Его он предлагает искать как частное от деления произведения данных чисел на их наибольший общий делитель. Вот как выглядит в символике Эйлера нахождение наименьшего общего кратного чисел 9 и 15:



Под каждым из чисел записано частное от деления этого числа на наибольший общий делитель. Затем найдены произведения этих частных на исходные числа (крест-накрест), результаты (которые, конечно, совпали) подписаны под чертой. Эйлер пишет: «И хотя для сыскания сего числа довольно бы было как умножение так и деление делать только однажды: однакож не неполезно и то, когда оба оныя действия дважды производятся... двойное сие умножение служит вместо поверения, не учинено ли притом какой погрешности» [с. 231].

При нахождении наименьшего общего кратного Эйлер рекомендует по возможности упрощать вычисления. Так, при поиске меньшего общего делимого чисел 4, 5, 6, 9, 10 и 16 он ищет сначала таковые для чисел 4 и 16, 5 и 10, что позволяет сразу исключить числа 4 и 5 из рассмотрения. Затем ищется меньшее общее делимое чисел 6 и 9, и только потом рассматриваются числа 10 и 16. Процесс поиска кратных Эйлер записывает в несколько строк, зачеркивая «выбывающие» числа:



Теперь можно решить основную задачу главы — сформулировать правило сложения дробей с разными знаменателями (а также смешанных чисел).

Глава VIII «О умножении в долях» открывается правилом умножения ломаного числа на целое. Умножение дроби на дробь Эйлер сводит к первому случаю. Итак, чтобы умножить дробь на целое число, необходимо ее числитель умножить на целое число, а знаменатель оставить прежним. Согласно этому, умножить дробь на дробь значит составить новую дробь, в числителе которой будет стоять произведение числителя исходной дроби на вторую дробь, а знаменатель останется прежним. Например, если говорить об умножении дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{7}$, то результатом, по Эйлеру, будет дробь $\frac{2\cdot\frac{4}{7}}{3}$ или, применяя первое правило, $\frac{\frac{8}{7}}{3}$, «но от того о сем произведении ясного понятия получить еще не можно» [с. 255]. Чтобы избавиться от такого «несвойственного ломаного числа», надо просто домножить числитель и знаменатель на одно и то же число. В данном случае это будет число 7:

$$\frac{\frac{8}{7}}{3}=\frac{\frac{8}{7}\cdot 7}{3\cdot 7}=\frac{8}{21}.$$

(Эти выкладки Эйлер проделывает словесно.) Отсюда видно, что произведение дробей можно найти, перемножив числители и взяв результат числителем, и знаменатели, взяв результат знаменателем. В целях удобства и скорости вычислений Эйлер рекомендует при умножении сразу производить сокращение дробей, если это возможно. Запись автора выглядит так:

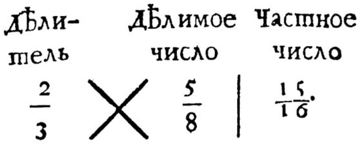
$$\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\text{ умноженныя чрез }\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{4}{\cancel{20}}}\text{ дают }\frac{1}{12}.$$

В связи с умножением дроби на дробь Эйлер обращает внимание на то, что при умножении на дробь результат может стать как больше первого множителя, так и меньше — это зависит от того, на какую дробь мы умножаем: большую единицы или меньшую.

Умножение смешанных чисел на дроби труда не представляет: можно либо перевести все числа в ломаные и затем умножить, либо применить распределительный закон. «Оба объявленные способы, как целыя числа с долями между собою умножать, в рассуждении своего основания между собою совершенно сходны: но в рассуждении порятка в умножении и их пользы находится между ними великая разность. Ибо часто употребляется первой способ умножения с великою пользою, а часто другой, так что ни одного другому предпочесть не можно, и для того надлежит в обоих равно обучаться» [с. 275–276].

Глава IX «О делении в долях» открывается правилом деления дробей, которые имеют одинаковые знаменатели. Этот случай легко обосновывается. Для деления в общем случае Эйлер предлагает привести дроби к общему знаменателю, «а потом деление делать вышепоказанным образом» [с. 284]. Отсюда нетрудно перейти к обычному правилу деления дроби на дробь, что Эйлер и делает. Он останавливается на частных случаях: когда дробь делится на целое число и когда она делится на долю. Деление «сложенных» (смешанных) чисел осуществляется с помощью предварительного их перевода в ломаные.

Деление $\frac{2}{3}$ на $\frac{5}{8}$ в обозначениях Эйлера выглядит так:



Дѣлитель Дѣлимое число Частное число

$\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} \,\Big|\, \frac{15}{16}.$

После того как формулируется правило деления с помощью умножения на обратную дробь, запись при делении $\frac{5}{8}$ на $\frac{3}{4}$ принимает вид:

$$\left(\frac{3}{4}\right)\ \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{3} \;\text{———}\; \frac{5}{\underset{2}{\cancel{8}}} \,\Big|\, \frac{5}{6}$$

Выводы

Из проведенного обзора можно видеть, прежде всего, что изложение каждой главы пронизано одной идеей и целью — дать удобное правило для нахождения результата действия, о котором говорится в главе. Все главы строятся примерно по одной и той же схеме: начиная изложение общими определениями и примерами, Эйлер затем на их основе неторопливо выводит правила, причем обычно рассматривает частные случаи и только потом переходит к разработке общих положений.

Такое единообразное построение глав позволяет увидеть общий ход рассуждений, который остается неизменным, хотя рассматриваются различные арифметические действия. На самих алгоритмах, хотя они и важны в приложениях, дополнительного акцента не делается (кстати, Эйлер не призывает запоминать алгоритмы вычислений). Таким образом, наличие ряда руководящих идей, которым подчинено все изложение, делает арифметику не набором готовых рецептов для решения примеров и задач, а дедуктивной дисциплиной, разворачивающейся перед взором читателя сообразно со здравым смыслом. Обратим внимание на то, что здравый смысл играет большую роль во всем изложении Эйлера, заменяя собою дедукцию там, где она невозможна из методических соображений.

Все излагаемые положения Эйлер в обязательном порядке снабжает большим количеством примеров, которые разбирает либо до формулировки правила, либо после. При этом, как уже отмечалось выше, наряду с готовыми символическими рецептами он дает пространные словесные объяснения. Только проведя читателя через несколько страниц сплошного текста, Эйлер показывает удобный способ для быстрого производства вычислений. Но и после этого он параллельно с записями в столбик дает словесное описание тех же действий.

Однако, несмотря на то, что в «Руководстве» рассматривается большое количество примеров, теория в этой книге стоит на первом месте. Сама установка автора на сознательность обучения уже предполагает повышенное внимание к теоретическим аспектам курса. Эйлер подробно рассказывает, откуда берутся те или иные алгоритмы, читатель фактически сам создает вместе с автором правила и способы производства вычислений (подробнее о месте теории в учебнике Эйлера см. [4]). Эта традиция — уделять большое внимание вопросам теории при обучении арифметике — сохранялась долгое время и после Эйлера. Отказываться от обоснований правил в арифметике начали лишь во второй половине XX в.

Эйлер в предисловии к «Руководству» настаивает на том, что учащиеся должны понимать, откуда берутся правила. При этом никакое новое понятие не появляется в курсе без соответствующей мотивировки. Так, в главе «О ломаных числах» Эйлер довольно долго изучает дроби; показывает, как их можно сокращать, и только после этого говорит о признаках делимости. Но признаки делимости не всегда годятся (о чем Эйлер снова прямо говорит), и тогда появляется понятие наибольшего общего делителя. Новые понятия и термины возникают у Эйлера именно в тот момент, когда в них появляется настоятельная необходимость, по ходу дела, но никак не заранее, со ссылками на то, что они пригодятся в будущем. Это естественное развертывание курса было нарушено уже в «Арифметике» Киселева. Он поместил перед разделом «Обыкновенные дроби» вспомогательный отдел «О делимости чисел». Однако в замечании, помещенном в самом начале отдела, говорится, что логичнее было бы от именованных чисел перейти к дробям.

Интересно отметить два момента в построении курса арифметики у Эйлера. Во-первых, он не пользуется термином «кратное», употребляя вместо него термин «делимое», что вполне логично. Во-вторых, он обходит стороной основную теорему арифметики. Сейчас принято рассказывать об этой теореме в связи с поиском наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного. Эйлер ищет делитель с помощью алгоритма Евклида, а кратное по формуле $m = ab/d$, где a и b — данные числа, а d — их наибольший общий делитель.

Эйлер при каждом удобном случае указывает читателю на приемы, позволяющие облегчить вычисления в тех или иных случаях. А в предисловии критикует авторов руководств, которые не обращают должного внимания на вычислительную сторону дела. Интерес Эйлера к вычислениям понятен: ведь сам он был работающим математиком и не понаслышке знал, как важно уметь быстро вычислять.

Учебник арифметики Эйлера оказал сильное влияние на многие последующие руководства, а частично следы «эйлеровской арифметики» сохраняются в учебниках для 5–6 классов и по сей день, чему можно только порадоваться.

Литература:

1. Руководство к арифметике для употребления гимназии при Императорской Академии наук, переведено с немецкого языка чрез Василья Адодурова, Академии наук адъюнкта. СПб., 1740.

2. *Прудников В. Е.* Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков. М.: Учпедгиз, 1956.

3. *Полякова Т. С.* Леонард Эйлер и математическое образование в России. М.: КомКнига, 2007.

4. *Хармац А. Г.* Создание Л. Эйлером учебника арифметики нового типа с повышенной в нем ролью теории // Ученые записки МОПИ. 1968. Т. 202. Вып. 6.

Г. П. Матвиевская
Оренбург, Россия

О неопубликованных записных книжках Эйлера

Abstract: The author makes a brief survey of Euler's unpublished notebooks.

300-летний юбилей Леонарда Эйлера дает повод нашим современникам вновь обратиться к творчеству великого ученого и еще раз отметить огромную роль, которую он сыграл в истории точных наук. По широте интересов и творческой активности, по количеству важнейших открытий в каждом из затронутых направлений науки, по богатству и разнообразию оригинальных идей Эйлер не имел себе равных. Поэтому его научное наследие столь велико, что даже простой обзор полученных им результатов оказался нелегкой проблемой, которая занимала ученых разных поколений. Важнейшее значение в этой связи имело начатое 100 лет назад международное издание полного собрания сочинений Эйлера («Leonhardi Euleri Opera Omnia»), не завершенное и поныне. Благодаря изучению его трудов и переписки был получен достаточный материал для общей оценки того вклада, который Эйлер внес в отдельные отрасли науки. На этом материале базируется обширная современная литература об Эйлере, в том числе и работы, в которых делаются попытки дать характеристику его жизни и творчества в целом. Однако нужно признать, что полноценная научная биография, которая не только знакомит с конкретными фактами и результатами деятельности великого ученого, но и позволяет проникнуть в его внутренний мир, все еще не создана. По-видимому, она сможет появиться только в результате коллективного труда математиков, механиков, астрономов, физиков, которые, обобщив все полученные при изучении его наследия данные, воссоздадут живой образ ученого во всей его полноте. Для решения этой сложнейшей задачи важно проследить ход развития идей Эйлера, понять, каким путем он пришел к каждому своему открытию. Как никто другой, он стремился показать читателю этот путь и ввести его в свою творческую лабораторию. Однако результаты, полученные им в разных областях науки, столь глубоки и так тесно переплетены между собой, что восстановить картину его творчества, несмотря на предельную ясность изложения, очень трудно.

В конце XIX в. внимание ученого мира привлекли сначала торжественное заседание, проведенное 17 ноября 1885 г. базельским Обществом естествоиспытателей в ознаменование столетия со дня смерти Эйлера, а затем подготовка к празднованию в 1907 г. его двухсотлетнего юбилея. Появились многочисленные работы о его жизни и творчестве. Одновременно велась пропаганда идеи издания полного собрания сочинений Эйлера. При его планировании предполагалось сотрудничество ученых трех стран, с которыми была связана его жизнь, — Швейцарии, России и Германии.

В 1907 г. была создана швейцарская Эйлеровская комиссия. Она приняла решение начать работу и обратилась к научным обществам, ученым всех стран и всем любителям науки с призывом оказать ей материальную поддержку. Эта инициатива была встречена с воодушевлением, и уже в 1911 г. из печати вышел первый том уникального издания, начатого по международной подписке и продолжающегося до настоящего времени. В предисловии редактор и один из энтузиастов издания «Opera Omnia» Ф. Рудио (F. Rudio) подробно изложил историю изучения и публикации научного наследия Эйлера.

Петербургская Академия наук приняла самое активное участие в работе. На общем собрании Академии 2 мая 1909 г. по предложению академиков О. А. Баклунда и Н. Я. Сонина была избрана специальная комиссия «для рассмотрения подлежащего передаче в Эйлеровскую комиссию материала, хранящегося в Архиве Академии и касающегося ученой деятельности Эйлера» [1]. Работа по изучению и приведению в порядок рукописей Эйлера была проделана в течение 1910 г. В декабре того же года все материалы Архива вместе с их описью, составленной Б. Л. Модзалевским [2], были отосланы в Цюрих в библиотеку Союзного политехникума для швейцарского Общества естествоиспытателей «с обязательством возвратить их в определенное время» ([3], [4]).

Исследованием присланных архивных материалов занялся известный историк математики Г. Энестрём (1852–1923), автор фундаментального списка трудов Эйлера [5], явившегося, по выражению Ф. Рудио, хребтом всего издания.

О результатах работы Энестрём сделал доклад Эйлеровской комиссии в 1913 г. [6]. Прежде всего, он выделил рукописи Эйлера, относящиеся к уже опубликованным работам, не проводя, однако, по его словам, точного сравнения их с соответствующими печатными изданиями. Затем он отсеял материалы, не принадлежащие Эйлеру, и классифицировал остальные по следующим признакам: а) общее и смешанное; б) научные работы, доклады и отзывы; в) письма Эйлера и письма, адресованные ему; г) биографические и библиографические материалы.

Особое внимание Энестрём обратил на рукописи, вызвавшие у него «большое удивление» и оказавшиеся записными книжками, «в которых Эйлер случайно отмечал такие вещи, которыми он в данное время занимался» [5, с. 193]. По мнению исследователя, «две наиболее старые записные книжки содержат, в основном, упражнения и имеют поэтому подчиненное значение, но с помощью других записных книжек можно довольно хорошо ознакомиться с историей эйлеровских открытий» [там же]. Он выразил пожелание, чтобы эти рукописи были основательно проработаны, поскольку сам он, по его словам, смог только бегло пролистать их и установить их хронологическую последовательность.

Энестрём считал необходимым дать для каждой математической записи особую заметку о ее содержании, однако заметил: «Так как записные книжки в общем имеют примерно 3000 исписанных страниц, и записи часто очень коротки, такая работа потребовала бы много месяцев» [5, с. 194]. Нужно подчеркнуть, что, как показало время, Энестрём недооценил трудность этой работы.

При издании «Opera Omnia» из архивных документов были использованы только рукописи опубликованных работ, а записные книжки предполагалось издать отдельно в серии биографических материалов. Как и другие рукописи Эйлера, они долго оставались в Швейцарии и лишь в послевоенное время (1947–1948 гг.) были возвращены в Архив АН СССР.[1]

Рукописные материалы привлекли внимание академика В. И. Смирнова и других ученых, посвятивших много лет изучению наследия Эйлера, прежде всего, Г. К. Михайлова и А. П. Юшкевича. Началось изучение и публикация научной переписки Эйлера, был дан подробный обзор его рукописей ([7]–[10] и др.). Естественно, что особый интерес вызвали неопубликованные материалы, в том числе записные книжки, хранящиеся в академическом архиве под шифром ф. 136, оп. 1, №№ 129–140. Это 12 переплетенных томов общим объемом свыше 3000 страниц. Количество страниц в книжках различно: от 152 (№ 130) до 544 (№ 131).

Как отмечал еще Г. Энестрём, изучение записных книжек Эйлера сопряжено с особыми трудностями. В 1911 г. в предисловии к первому тому «Opera Omnia» Ф. Рудио счел возможным применить ко всем трудам ученого выражение «огромная неупорядоченная масса» [11, с. IX]. С гораздо большим основанием этим термином можно воспользоваться для характеристики его записных книжек. Исследователь сталкивается здесь с необозримым хаосом разнородных научных заметок, набросков к письмам и статьям, формулировок и доказательств теорем, иногда нуждающихся в уточнении, чертежей, задач и выкладок, часто не доведенных до конца.

Однако каждая запись отражает определенную стадию работы Эйлера над той или иной проблемой, и между отдельными заметками, несомненно, существуют внутренние связи. Можно с уверенностью сказать, что если удастся выявить эти связи, то выяснятся многие важные стороны математического творчества Эйлера, которые невозможно осветить, исходя лишь из его опубликованных работ. Более того, результаты изучения записных книжек могут дать материал для интересных выводов относительно психологии научного творчества вообще.

В записных книжках Эйлера четко отражен ход его работы над многими научными проблемами, окончательное решение которых известно по опубликованным трудам. Есть также немало заметок, где рассматриваются вопросы, не затронутые в печатных работах. Такие записи, естественно, вызывают наибольший интерес.

Часто заметки из записных книжек касаются решения задач, которые Эйлер обсуждал в переписке с другими учеными. В таких случаях можно с достаточной точностью датировать эти и соседние записи, а содержание писем позволяет выяснить, когда и в какой связи перед Эйлером встала та или иная математическая проблема. Сопоставление записей с соответствующими письмами предоставляет богатые возможности для изучения его творческого метода. Иногда удается проследить, как, развивая возникшую идею, он приходит к совершенно новой постановке вопроса, далекой от первоначальной и дающей результаты, видимо, неожиданные для него самого.

В записных книжках Эйлер, по-видимому, фиксировал результаты сразу после их получения. Некоторые, вероятно, наиболее актуальные с его точки зрения и не вызывавшие у него сомнений, он тут же сообщал адресатам. Другие же он долго проверял: они снова и снова повторяются в записных книжках (иногда в несколько измененном виде) и значительно позднее всплывают в переписке. В этом смысле заметки оказываются черновыми набросками для писем.

В записных книжках наглядно проявляется стиль научной работы Эйлера и, прежде всего, — целеустремленность исследования, сохранение основной идеи в течение многих лет и настойчивый поиск решения задачи, несмотря ни на какие промахи и неудачи на этом пути. В них также ясно отражено, насколько важное значение имело для Эйлера сочетание теории и научного эксперимента: занятие прикладными вопросами давало ему очевидный стимул к развитию теории.

Первый шаг при исследовании записных книжек заключался в датировке и общем обзоре каждой из них. Впервые это, как сказано выше, сделал в 1913 г. Г. Энестрём [6]; впоследствии датировка уточнялась, а содержание каждой книжки освещалось более полно ([7], [12], [14]–[16] и др.). Первый общий обзор всего материала был дан в 1957 г. Г. К. Михайловым [12], который выделил заметки по механике.

Следующий, более сложный этап работы потребовал классификации материала по отдельным дисциплинам и подробного ознакомления с содержанием соответствующих записей. Однако это является весьма сложной задачей ввиду огромного количества заметок и их разнообразия, затрудняющего полный обзор и глубокий научный анализ в одно и то же время. Поэтому возможен двоякий подход к ее решению. Можно рассматривать записные книжки в целом, не углубляясь в частности и не разбирая подробно отдельных проблем, что позволяет лучше проследить процесс творчества. С другой стороны, можно выделить все записи по какому-либо конкретному вопросу, подробно изучая каждую заметку, и полнее осветить таким образом историю творчества Эйлера в этой узкой области.

По инициативе В. И. Смирнова изучение записных книжек Эйлера было начато в 1954 г. с заметок по теории чисел, которые составляют значительную часть общего объема записных книжек (около 800 страниц текста). Был дан обзор всего материала, предложена его классификация, опубликован текст записей по отдельным вопросам (диофантов анализ, совершенные числа, «partitio numerorum» и др.) и дан его анализ ([16]–[27] и др.).

Хотя изучение записных книжек велось достаточно интенсивно и, в той или иной мере, затрагивались заметки по механике, алгебре, геометрии, анализу, физике, астрономии (Ю. А. Белый, Р. И. Галченкова, Э. Кноблох, Л. С. Минченко, Г. К. Михайлов, Н. И. Невская), наиболее изученными остаются записи по теории чисел. В 1997 г. вышла из печати подготовленная Г. П. Матвиевской и Е. П. Ожиговой книга [28], в которой обобщены результаты, полученные рядом исследователей (А. А. Киселёв, Г. П. Матвиевская, И. Г. Мельников, Е. П. Ожигова).

Однако работа еще далеко не завершена. К ней подключаются историки математики из разных городов, которые имеют в своем распоряжении фотокопии записных книжек Эйлера.

Одним из центров этой работы стал в последние годы Оренбургский государственный педагогический университет. Основное внимание здесь было уделено записям Эйлера, касающимся теории чисел (теория делимости, аналитическая теория чисел) и различных вопросов математического анализа (Г. П. Матвиевская, В. Д. Павлидис, И. В. Прояева, И. В. Игнатушина, Ж. Ю. Личикова и др.) [29].

В записных книжках встречаются записи, которые не носят, как кажется на первый взгляд, чисто научного характера, но при подробном рассмотрении дают ценный биографический материал. Примером является запись в книжке, датируемой приблизительно 1749–1755 гг.[2] Здесь содержится каталог книг библиотеки Эйлера, озаглавленный «Каталог моих книг» (Catalogus Librorum meorum). Он бегло упоминается в статье Г. К. Михайлова [12, с. 88], где приведена также фотокопия двух фрагментов текста. Однако этот каталог заслуживал внимательного изучения, так как набор книг в библиотеке красноречиво говорит об интересах и склонностях ее владельца [13]. Список занимает 20 страниц записной книжки (лл. 192–201 об.) и включает 539 названий сочинений на разных языках — латинском, немецком, французском, английском, русском, греческом. Книги описаны без какой-либо определенной системы и подразделены только на издания in folio и in quarto. Даже беглый обзор каталога показывает, что к 1750 г. Эйлер владел большой и богатой по содержанию библиотекой. В ней были представлены не только естественные, но и гуманитарные науки, а также религиозная и художественная литературы, главным образом классическая. В списке фигурируют сочинения Гомера (№ 379), Овидия (№ 317), Тацита (№ 282), Геродота (№ 473), Сенеки (№ 366), Цицерона (№№ 49, 201, 398), Вергилия (№ 187), собрание древних латинских поэтов (№ 404), произведения Корнеля (№№ 207–275).

В библиотеке было много старинных книг, изданных в XVII и даже в XVI в. Наиболее древнее издание — латинская Библия 1524 г. (№ 376), которая уже во времена Эйлера являлась библиографической редкостью. Немалую ценность с этой точки зрения представляло и немецкое издание «Основ христианской религии» Кальвина (№ 16), выпущенное в 1572 г. в Гейдельберге. Сочинения Вергилия, значащиеся под № 187, были изданы в 1583 г.

Каталог показывает, что Эйлер интересовался и новой историей. В его библиотеке были книги по истории Франции (№ 283), Голландии (№ 281), России (№ 170; французское издание, Гаага, 1725 г.; автор не указан), по всеобщей истории (№№ 314–315).

Из философских произведений обращают на себя внимание прижизненные издания Р. Декарта: «Размышления о первой философии», опубликованные в Амстердаме в 1645 году (№ 303), и «Письмо к Боэцию» (№ 304), вышедшее из печати там же в 1643 г. Имеются также произведения Ф. Бэкона (№ 324; без указания года издания), русский перевод трактата Фонтенеля о множественности миров (№ 412), сочинение Т. Кампанеллы об испанской монархии (№ 465) и др.

Важное место в библиотеке Эйлера занимали словари древних и современных языков (№№ 60, 69, 81, 94, 104, 130, 375 и др.), а также различные учебники грамматики.

Среди математических книг больше всего современных Эйлеру изданий — его собственные работы и сочинения ученых, с которыми он периодически поддерживал научные связи. К ним относятся труды братьев Бернулли, занесенные в список в самом начале (№№ 37, 40–45), сочинения Ж. Даламбера, в частности, трактат о причине ветров (№ 403), который неоднократно обсуждался в переписке Эйлера с Д. Бернулли [9, с. 32–34].

Обращаясь к опубликованной корреспонденции Эйлера, иногда мы можем выяснить происхождение той или иной книги, указанной в каталоге. Так, оказывается, что изданную в 1745 г. двухтомную переписку Г. В. Лейбница с Иоганном Бернулли (№№ 44–45) последний прислал Эйлеру в том же году, о чем сообщается в его письме от 23 сентября [9, с. 42, письмо № 188]. Числящаяся в списке под № 121 книга А. К. Клеро (A. C. Clairaut, 1713–1765) «Теория фигуры Земли», которая была издана в Париже в 1743 г., также была подарена Эйлеру автором: о ее отправке он сообщал в письме от 7 сентября 1743 г. [9, с. 139–140, письмо № 1104].

В каталоге отмечено несколько (№№ 120, 122–125, 131) сочинений П. Л. Мопертюи (P. L. Maupertuis, 1698–1759), с которым Эйлера долгие годы связывали дружеские отношения. В их числе — «Фигура Земли» («La figure de la terre». Paris, 1738), посланная автором 20 мая 1738 г. [9, с. 213, письмо № 1736]. За этот подарок Эйлер выразил ему «величайшую благодарность» в письме от 23 ноября (4 декабря) того же года ([10, с. 169–174], [9, с. 213, письмо № 1737]) и сообщил о нем Д. Бернулли [9, с. 25, письмо № 85]. Труды Мопертюи «Рассуждение о параллаксе Луны» («Discourse sur la parallaxe de la Lune». Paris, 1741) и «Морская астрономия» («Astronomie nautique». Paris, 1743), фигурирующие под №№ 120 и 123, также упоминаются в переписке [9, с. 232, письмо № 136; с. 32, письмо № 126].

Под номерами 119 и 126 в списке значатся сочинения маркизы Дю Шатле (G. E. du Chatelet, 1706–1749) — одной из образованнейших женщин Франции того времени, научные исследования которой высоко ценил Ф. М. Вольтер, отмечавший ее «обширный и могучий ум» [30]. Первое из них — «Основы физики» («Institutions physiques»), изданные в 1742 г. в Амстердаме, второе — «Диссертация о природе и распространении огня» («Dissertation sur la nature et la propagation de la feu». Paris, 1744). Эйлер, как видно из его переписки, относился к трудам Дю Шатле с большим вниманием и дал им высокую оценку. «Диссертация о природе и распространении огня» была представлена на конкурс в связи с премией, установленной в 1738 г. Парижской Академией наук за работу на указанную тему. Победу в нем одержал Эйлер [31], но исследование Дю Шатле было также отмечено и напечатано в 1744 г. Еще до публикации она послала копию работы Эйлеру через Мопертюи. В письме к последнему от 19 февраля (1 марта) 1740 г. ([9, с. 213, письмо № 1738], [10, с. 174]) Эйлер выражает признательность за посланные, но задержавшиеся в дороге статьи и замечает: «Я огорчен этой задержкой, так как охвачен нетерпением увидеть среди других статью знаменитой маркизы, которая соизволила почтить меня, выступив моим конкурентом». Тем же числом помечено его письмо к самой Дю Шатле ([8, с. 280–281], [9, с. 263, письмо № 2234]). В нем сказано: «Для меня, милостивая государыня, крайне почетно работать на одном поприще с особой, которая является одним из самых редких украшений своего пола, благодаря тому блеску, каким Вы озарили даже самые возвышенные науки, в которые Вы внесли величие Вашего таланта». Понятно поэтому, что после выхода из печати это сочинение Дю Шатле заняло место в библиотеке Эйлера.

Экземпляр «Основ физики» Дю Шатле, опубликованных в 1742 г. (первое издание — Париж, 1740), был также прислан Эйлеру автором. Об этом свидетельствует письмо Эйлера к Гольдбаху от 27 апреля (8 мая) 1742 г. [9, с. 89, письмо № 648], в котором сказано: «Мадам маркиза Дю Шатле прислала мне экземпляр нового издания «Основ физики» вместе со своим портретом» [13, с. 101]. По-видимому, после получения книги Эйлер написал письмо к Дю Шатле, посвященное разбору этого сочинения и содержащее весьма лестный отзыв о нем; письмо датируется приблизительно 1742 г. ([8, с. 275–280], [9, с. 164, письмо № 2235]).

Диссертация астронома и математика Г. Гейнзиуса (G. Heinsius, 1709–1769) о кольце Сатурна («De apparentiis annuli Saturni commentario». Lipsiae, 1745), была, как свидетельствует переписка [9, с. 77, письмо № 534], выслана автором Эйлеру 25 июля 1745 г.; она числится в каталоге под № 79.

В списке упоминаются также книги (№№ 95, 97, 98) астронома Ч. Лидбеттера (Ch. Leadbetter, ум. 1744). Среди них «полная система астрономии» («A complete system of astronomy. With new tables and astronomy of satellites», London, 1729), на которую ссылается Гейнзиус при оценке лунных таблиц Эйлера в письме от 26 февраля 1746 г. [9, с. 77, письмо № 538].

Под № 53 в списке Эйлера значится сочинение академика Ж. Н. Делиля (J. N. Delisle, 1688–1768). Это «Mèmoires pour servire à l'histoire et au progrès de l'astronomie, de la gèographie et de la physique» (St. Petersbourg, 1738), в котором собраны материалы по истории астрономии [33, с. 65].

Трактат данцигского математика Г. Кюна (H. Kühn, 1690–1769) «Рассуждение о происхождении источников» («Meditationes de origine fontiüm et aquae putealis», Bordeaux, 1741), высланный автором Эйлеру 28 февраля 1742 г. [9, с. 163, письмо № 1309], занесен в каталог под № 32. В письме к Гольдбаху от 13 (24) августа 1743 г. Эйлер неодобрительно отозвался об этой книге, сообщая, что внимательно прочел ее и свои замечания отправил Кюну [32, с. 178–179]. Они вызвали оживленную переписку ([8, с. 133–140], [9, с. 163–164]).

Под № 128 числится трактат о комете 1743–1744 г. («Traité de la comète...», Paris, 1744) швейцарского астронома Ж. Ф. Шезо (J. Ph. Loys de Cheseaux, 1718–1751). Это сочинение, не раз упоминающееся в переписке Эйлера с учеными, вызвало интерес и одобрение как самого Эйлера, так и Д. Бернулли, Ж. Н. Делиля, Г. Гейнзиуса [9, с. 31, 116, 271, письма №№ 115, 117, 880, 2309]. В письмах к И. Д. Шумахеру от 10 ноября 1744 г. Эйлер, высоко оценивая трактат Шезо, рекомендовал его автора на место Делиля в случае отъезда последнего из Петербурга [9, с. 271, письмо № 2309].

Наряду с книгами современных Эйлеру математиков и астрономов в его библиотеке имелись труды классиков древности, в том числе греческие и латинские издания «Начал» и других сочинений Евклида (№№ 235, 284, 357), «Конические сечения» Аполлония издания 1669 г. (№ 259). Насчитывалось также немало книг европейских математиков XVI–XVII вв.: алгебраический трактат Христофора Рудольфа в обработке Михаэля Штифеля (№ 165), «Ключ математики» В. Оутреда (№ 332), труды Дж. Непера (№ 78), С. Стевина (№ 62), И. Кеплера (№ 257), Ван Схоутена (№ 117).

Почетное место в библиотеке Эйлера принадлежало, по-видимому, трудам И. Ньютона (№№ 38–39, 448–450). Его «Математические начала натуральной философии» имелись в трех экземплярах, которые числятся в каталоге под №№ 448–450. Рядом с названием сочинения Эйлер приписал: «С замечаниями». Вероятно, здесь речь идет о его собственноручных пометках на полях принадлежавшей впоследствии С. И. Вавилову книги, которые были исследованы В. И. Лысенко [34]. Запись в каталоге позволяет уточнить время составления этих заметок Эйлера.

Примечания:

1. Сейчас Санкт-Петербургский филиал Архива РАН (СПбФ АРАН).
2. См. СПбФ АРАН. Ф. 136. Оп. 1. Д. 134. Л. 192–201 об.

Литература

1. Известия Императорской Академии наук. Серия VII. 1909. Т. 3. № 14. С. 929–930.
2. *Модзалевский Б. Л.* Перечень рукописей Эйлера, хранящихся в Архиве конференции Императорской Академии наук. 1910 (на правах рукописи).

3. Обозрение архивных материалов (Архив АН СССР). Вып. I. Л., 1933. С. 73–74.

4. *Rudio F., Schröter C.* Die Eulerausgabe // Vierteljahresschrift d. Naturfosch. Ges. in Zürich. № 53. 1908.

5. *Eneström G.* Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers // Jahresbericht der Deutschen Matematiker-Vereinigung. Ergänzungsbände. Leipzig, 1910. Bd. IV. L. 1–2.

6. *Eneström G.* Bercht an die Eulerkommission der Schweizerischen naturtorschenden Gessellschaft über die Eulerschen Manuskripte der Petersburger Akademie // Jahresbericht der Deutchen Mathematiker-Vereinigung. Leipzig, 1913. Bd. 22. H. 1–2. S. 191–205.

7. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. Т. 1. Научное описание. М.; Л.: Наука, 1962.

8. *Эйлер Л.* Письма к ученым / Под ред. В. И. Смирнова. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1963.

9. *Эйлер Л.* Переписка. Аннотированный указатель / Под ред. В. И. Смирнова. и А. П. Юшкевича. М.: Изд-во АН СССР, 1967.

10. *Юшкевич А. П.* Об архивном наследии Леонарда Эйлера // ВИЕТ. 1982. № 3. С. 137–139.

11. *Rudio F.* Vorwort zu «Opera omnia». LEOO I, 1. 1911.

12. *Михайлов Г. К.* Записные книжки Леонарда Эйлера в Архиве АН СССР (Общее описание и заметки по механике) // ИМИ. М., 1957. Вып. 10. С. 67–94.

13. *Матвиевская Г. П.* Библиотека Эйлера//ВИЕТ. 1982. № 3. С. 139–140.

14. *Михайлов Г. К., Смирнов В. И.* Неопубликованные материалы Леонарда Эйлера в Архиве Академии наук СССР // Леонард Эйлер. М., 1958. С. 47–79.

15. *Michailov G. K.* Notizen über die unveröffentlichen Manuskripte von Leonhard Euler // Leonhard Euler Sammelband der zu Ehren des 250. Geburstages Leonhard Euler der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abandlungen. Berlin, 1959. S. 256–280.

16. *Матвиевская Г. П.* О неопубликованных рукописях Леонарда Эйлера по диофантову анализу // ИМИ. М., 1960. Вып. 13. С. 107–186.

17. *Матвиевская Г. П.* Неопубликованные рукописи Леонарда Эйлера по теории чисел. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Л., 1958.

18. *Матвиевская Г. П.* Неопубликованные рукописи Л. Эйлера по диофантову анализу // Труды Института истории естествознания и техники. М., 1959. Т. 22. С. 240–250.

19. *Матвиевская Г. П.* Заметки о совершенных числах в записных книжках Эйлера// Труды института истории естествознания и техники. М., 1960. Т. 34. С. 415–427.

20. *Матвиевская Г. П.* Постулат Бертрана в записях Эйлера // ИМИ. М., 1961. Вып. 14. С. 285–288.

21. *Киселёв А. А., Матвиевская Г. П.* Неопубликованные записи Эйлера по partition numerorum//ИМИ. М. 1961. Вып. 14. С. 145–180.

22. *Матвиевская Г. П.* Заметки о многоугольных числах в записных книжках Эйлера // ИМИ. М., 1983. Вып. 27. С. 27–50.

23. *Matviewskaja G. P., Ožigova E. P.* Leonhard Eulers handschriftlicher Nachlass zur Zahlentheorie // Leonhard Euler. 1707–1783. Beitrage zu Leben und Werk. Basel, 1983. S. 151–160.

24. *Ожигова Е. П.* Функция Эйлера в его записных книжках // ИМИ. М., 1983. Вып. 27. С. 50–63.

25. *Матвиевская Г. П.* О рукописном наследии и записных книжках Эйлера // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 122–129.

26. *Матвиевская Г. П., Ожигова Е. П.* Рукописные материалы Эйлера по теории чисел // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 130–138.

27. *Кноблох Э.* Математические записные книжки Леонарда Эйлера // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. М.: Наука, 1988. С. 102–121.

28. Неопубликованные материалы Л. Эйлера по теории чисел. СПб.: Наука, 1997.

29. Из истории математики XVIII века. К предстоящему 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера (1707–1783). Вып. 1–5. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2000–2006.

30. *Кладо Т. Н.* Г. Э. дю Шатле // Леонард Эйлер. Письма к ученым. М.; Л.: Наука, 1963. С. 275.

31. *Минченко Л. С.* Физика Эйлера // Труды Института истории естествознания и техники АН СССР. 1957. Т. 19.

32. Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729–1764. Hrsg. Und eingeleitet von A. P. Juškevič und E. Winter. Zur Druck vorbereitet von P. Hoffmann, T. N. Klado und Ju. Ch. Kopelevič. Berlin, 1965.

33. *Невская Н. И.* Жозеф-Никола Делиль и Петербургская Академия наук (XVIII в.) // Вопросы истории астрономии. Вып. 3. М., 1974. С. 61–93.

34. *Лысенко В. И.* О замечаниях Эйлера к «Математическим началам натуральной философии» // ВИЕТ. Вып. 20. 1966. С. 38–46.

Mirjana Ilic
Paris, France

The Euler-Wettstein Correspondence[*]

Аннотация: Только в 1976 г. А. П. Юшкевич и Э. Винтер опубликовали всю известную переписку Эйлера с Л. К. Веттштейном, основанную на копиях писем, сделанных Фуссом, который предоставил их Архиву Академии наук в Санкт-Петербурге. Публикация 7 тома серии IVA Полного собрания сочинений Эйлера даст возможность впервые представить тексты этих писем, написанных на французском языке, основанные на оригинальных рукописях.

Эти письма особенно важны, так как отражают научную жизнь Королевского общества, Академий наук Петербурга и Берлина и охватывают 14 лет XVIII века (они будут опубликованы в 2008 г.).

From 1746 to 1759, Euler corresponded regularly, in French, with his compatriot J.-C. Wettstein, also a native of Basel and at that time resident in England. Of their letters, only 56 of Euler's and one of Wettstein's have survived. Our Volume A7 of Euler's *Opera Omnia* will present, for the first time, the texts of these French-language letters established from the original manuscript[1].

Though Wettstein was not trained as either a mathematician or a physicist, or indeed as a scientist, his general scientific knowledge was vast. Indeed, the letters Euler wrote him deal with astronomy and geography, sometimes physics and technical matters. They also recount the scientific life of Berlin, Saint Petersburg, Paris and London, the major intellectual centres of Europe.

Why did Euler maintain this long and almost uninterrupted correspondence with Wettstein, writing on average one letter every three months? To us, the answer seems obvious: he saw in Wettstein a representative of the English scientific world: living in London, Wettstein was in contact with a number of leading English scientists, and in particular with members of the Royal Society, to which he was himself elected on the 4th July 1754.

From the beginning of their correspondence, Wettstein became an intermediary between Euler and the English scientific world. Euler's own direct contacts with English scientists remained limited: there were only about twenty Englishmen among his almost 300 correspondents. Wettstein therefore played a major role in providing England with information about Euler's theories and about scientific life in continental Europe. Corresponding with Wettstein was often tantamount to contacting some English scientist interested in the same problems; informing Wettstein about his ideas or certain events in the intellectual life of Berlin, Paris or Saint Petersburg was frequently aimed at providing information about them to the English republic of letters in general and to Bradley and Dobbs, those most interested, in particular. More-

---

[*] The first version of this text was written by A. P. Juskevic. After his death, Mirjana Ilic, who had been working with him, agreed to continue and complete the annotation of this correspondence. She has found it necessary to make significant changes to this text.

over, Wettstein proved to be a zealous messenger, quick to provide Euler with various books, maps and English periodicals for his research and with tobacco from Virginia for his pleasure; and the Berlin Academy with seeds for its plantations.

Who was Johann Caspar Wettstein? Born in Basel, Switzerland, on the 1st February 1695, he belonged to an upper middle-class family [1]. In May 1714, he received a doctorate in theology from the University of Basel and became a protestant minister. Ten years later, he settled in England, and in 1735 entered the service of Frederick Lewis, Prince of Wales, as chaplain and librarian. Because of this position, he made numerous acquaintances in the English intellectual world in general and in the Royal Society in particular. In 1741, Wettstein met Euler in Saint Petersburg, just before the latter left for Berlin. Subsequently, they corresponded regularly, except during a period of a few months in early 1748. After the death of the Prince of Wales, Wettstein remained in England; but in the last letter, dated 23rd October 1759, Euler indicates that Wettstein had declared his intention of moving to Berlin but was hindered by problems with his health, which had always been fragile. He died on the 15th August 1760 in Tunbridge Wells[2]. For the significant services he had rendered to both Euler and the Berlin Academy, Wettstein had been made a foreign associate of this body on the 16th March 1752.

The correspondence was initiated by Wettstein who, in late 1745 or early 1746, asked Euler to send him some genealogical almanacs, and to provide information about changes that had recently occurred at the Saint Petersburg Academy. Their correspondence began with geographical and astronomical questions. Once again, it was Wettstein who took the initiative by asking for information about the great Russian expeditions organized from 1725 to 1730 and 1733 to 1743 by the Saint Petersburg Academy and led by Bering, who was succeeded, after his death, by his assistant Spangenberg. These were expeditions to the North coast of Siberia, including Kamchatka, and to an extremely vast area of the Pacific between Asia and North America. Both, especially the second, known as the Great Northern Expedition, led to discoveries of considerable importance. They inspired great interest everywhere, especially in England where other great geographical expeditions were being organized. In Saint Petersburg, many of the results of these scientific expeditions were kept secret for a long time and, in his answer to Wettstein, Euler writes that he very much doubts that Russia will ever reveal the details of the discoveries. However, Euler had learned certain things about them from an official source while he was working in the geography department in Saint Petersburg and, as stated in the letter dated 16th July 1746, he knew "still more things, which friends who had come back from the Saint Petersburg Academy [had] communicated [to him] by word of mouth". We do not know the identity of these "friends". In any case, Euler sent Wettstein some information which, while not very specific, was all the same valuable; and he added some comments intended for A. Dobbs, the English navigator and geographer, who was then organizing other expeditions with the aim of discovering a passage from Hudson's Bay to the Pacific. The relevant part of letter number 5 was immediately published in the *Philosophical Transactions* (*Phil. Trans*)[3]. This publication, which indeed did not reveal much about the secrets kept in Saint Petersburg, caused no displeasure there[4]. The Russian government's reaction was quite different when J.-N. Delisle, a member of the Saint Petersburg Academy from 1726 to 1747, published without its authorisation the *Explanation of the map of the new discoveries in the North of the Southern Sea...* [2].

The Saint Petersburg Academy responded by publishing, in both French and German, an anonymous brochure accusing Delisle of several purely geographical errors. The Academy sought Euler's help in distributing this brochure; he gave it, probably reluctantly. There is a brief reference to this episode in the letter Euler wrote to Wettstein on the 5th June 1753 [5] [3].

Let us now turn to astronomy, to which much more space is devoted in the correspondence. It is mentioned for the first time on the 29th March 1746, when Euler speaks of his lunar tables. Then, the construction of lunar tables depended on the theory of the movement of the Moon; this was at the time attracting the attention both of the greatest mathematicians, like Euler himself, A.-C. Clairaut and J. d'Alembert, and of other scientists, including the Englishmen already mentioned as well as the astronomer J.-T. Mayer of Göttingen.

The main question being rather hotly debated by the three "great" scientists mentioned below, in 1747 and the years following, summed up in the letter from Euler to Wettstein dated 27th April 1751, was "whether Newton's theory suffices to explain all the inequalities in the movement of the Moon or not". For a while it had seemed that the observations of the apsides of the Moon were not consistent with the theoretical predictions concerning the lunar orbit, calculated on the basis of Newton's law of gravitation, and that the entire Newtonian system of celestial mechanics was thereby undermined. In 1747, Clairaut, Euler and d'Alembert were all convinced that Newton's law should be corrected to some extent. But, at the end of 1748, Clairaut found, in his method of determining the lunar orbit, an error that explained the disparity they had noticed. After revising all his calculations, he established that the theoretical predictions based on Newton's theory of gravitation were in perfect agreement with the observations of the actual movement of the Moon's apogee and, in the first half of 1749, he so informed the Paris Academy, the Royal Society and Euler himself in Berlin. Euler was not immediately persuaded by Clairaut's explanations and undertook to settle the matter himself once and for all. On the one hand, he suggested that the Saint Petersburg Academy should organize a competition on the subject for its 1751 prize; and, on the other, he developed his own theory of the movement of the Moon. This theory was completely different from Clairaut's and very well suited to the construction of new lunar tables. Euler's work was published in Berlin at almost the same time as Clairaut's *Theory of the Moon*, which had won the Academy's prize and appeared in Saint Petersburg (1753). Some of these events, which are of the greatest importance in the progress of celestial mechanics, are mentioned in letter 22 from Euler to Wettstein, which we have already quoted[6].

Lunar tables were of great importance to navigation and consequently to worldwide business and economy. Determining the coordinates of newly discovered lands, of islands and towns, as well as those of ships at sea, had become most urgent, and astronomy could furnish very effective means to this end. Determining latitude is no problem when the sky is clear, but longitude is a very different matter. The importance of this problem was so widely recognized that, in 1714, the British Parliament decided to award a prize of £20,000 to anyone who could find a way to determine longitude at sea with a margin of error no greater than half a degree.

Using certain theorems presented by Euler in his *Theory of the Moon* in 1753, as well as the very accurate observations made at the Göttingen observatory, Mayer managed to construct lunar and solar tables, published in 1753, that met the conditions imposed by the British Parliament. Euler expressed much approval of these tables in his letters to Wettstein dated 9th April and 6th July 1754; in the next letter, he declared himself pleased that these tables had been well received in England, and that Bradley's judgment of them had been favourable, unlike d'Alembert's; he mentioned in passing Mayer's acknowledgment that he had used Euler's method in the creation of his tables. Finally, on the 31st May 1755, announcing that Mayer "had formally presented himself as a candidate for the prize to be awarded for the determination of longitude", he expressed his belief "that no one [had] so far had such a just claim to it". In 1761, Mayer's tables were used and checked by the English astronomer Nevil Maskelyne on a voyage to the island of Saint Helena. In the end, in 1765, Mayer's widow got a prize of £3,000, while Euler received the sum of £300 for the theorems and formulae Mayer had used. But the main prize was awarded to the Englishman J. Harrison, who in 1761 had made a very precise chronometer which solved the problem more accurately and more simply than the astronomical tables.

Among the other astronomical questions dealt with in the correspondence is Euler's opinion about the non-stability of the solar system. From a comparison of ancient, medieval and modern astronomical observations, Euler concluded that the length of the year was gradually diminishing, that the planets were getting closer to the Sun and that the world, at least the visible world, must have been created at some point and must cease to exist at some future time. Many other astronomical problems are mentioned in this correspondence, for example, the variation in the obliquity of the ecliptic; comets; and the atmospheres of the Moon and Venus.

In addition to astronomical and geographical questions, the correspondence includes much information about other topics that interested the great mathematician and about related events in scientific life. Though chemistry is mentioned, more space is devoted to physics, especially electricity, and also to certain aspects of magnetism, for example, needles indicating magnetic declination, and artificial magnets. No aspect of Euler's activity in Berlin is forgotten.

Let us however turn to optics, a discipline especially important to astronomy since the invention of telescopes. According to the Newtonian theory of light, it was impossible to construct achromatic refracting telescopes that would produce clear and sharp images. Optics, and in particular instrumental optics, was one of Euler's fields of study for many years, first of all at the Saint Petersburg Observatory under the direction of J.-N. Delisle, then in Berlin, and again in Saint Petersburg. Thus he created his own theory of light, different from those of Newton and Huygens, and, from a close examination of the functioning and the structure of the eye, came to the conclusion that it was possible to construct lenses and achromatic telescopes by combining in a certain way transparent media of different refractive indexes. His ideas on this question are presented in a brief essay *On the perfection of the objective lenses of telescopes*, published in 1749; this study was vigorously attacked in letters written by J. Short and J. Dollond, two English supporters of Newton. These letters are lost, but Euler mentioned them to Wettstein on the 8th July 1752. Euler's responses to his critics are also lost, unless they survive — at least in substance — in the texts dated 15th and 19th June 1752 (the first addressed to Dollond, the second to Short) and published in *Phil.* Trans[7]. In his responses, Euler admits that his objectives must be constructed in a special way, different from the one normally used; in fact, his own telescopes, the lenses of which were made of glass and water, were still very imperfect. Euler's long polemic with Dollond can be followed in several later letters from Euler to Wettstein . Euler informs Wettstein that he has completed a major work on Dioptrics[8], and also presents the plan of a telescope that he would be willing to construct for the Royal Society. In the end, Dollond accepted the principle proposed by Euler and began successfully constructing objectives made by assembling lenses of crown glass and flint-glass; in his letter of the 31st October 1758, Euler underlined the success of his principle.

Finally, we also find some political observations in Euler's letters, starting in 1756. He mentions some episodes from the Seven Years' War and speaks as a Prussian patriot and a loyal subject of King Frederick II. It was at the time of the Seven Years' War that Euler began negotiating again with the Russian government about returning to the Saint Petersburg Academy, which he considered inevitable. His second period of residence in Saint Petersburg was probably the most peaceful and even the happiest time of his life, even though he was almost completely blind. He spent the final years of his life continuing his research surrounded by his family and his students. According to A. P. Juskevic, while Eulers remained a citizen of Basel, he would have agreed with Cicero: "Patria est ubicumque est bene"[9].

We have not exhausted all the topics mentioned, either briefly or at length, in the Euler-Wettstein correspondence, and it would be a shame to deprive the readers of the pleasure of discovering in it other interesting matters; for example, Euler's wish to settle in England with his family, and especially the relationship between these compatriots who discuss their family life and their personal problems as well as purely scientific questions.

Notes:

[1] The manuscripts of 46 Euler's letters are in the Archives of the Wellcome Institute for the History of Medicine in London (Mss 5152). The copies made in 1843 by P.-H. Fuss are in the Archives of the Saint Petersburg Archives Collection of the Russian Academy of Sciences (SPbF ARAN. F. 136. Op. 2. № 22. L. 1–70).

[2] And not in London, as stated in Juskevic–Winter [3, p. 407].

[3] The Philosophical Transactions of the Royal Society, 44, part 2 (1747) 1748, p. 421–423: Extract of a Letter from Mr. Leonard Euler, Prof. Mathem. and Member of the Imperial Society at Petersburg, to the Rev. Mr. Cha. Wetstein, Chaplain and Secretary to His Royal Highness the Prince of Walles, concerning the Discoveries of the Russians on the North-East Coast of Asia. Berlin, Dec. 10. 1746

[4] Euler, fearing that this publication might have inspired considerable ill-feeling against him in St Petersburg, was in fact rather embarrassed by it (cf. letter 12); Schumacher reassured him shortly afterwards, on the 6th July 1748 (R 2168), by explaining that no-one in Russia read the Phil. Trans.; he indicated however that Euler could have been more prudent.

5. This letter is incorrectly dated 27th October 1753 in Juskevic–Winter [3, p. 315].

6. Readers interested in the history of research by Clairaut and Euler on lunar theory (which the latter continued for more than another quarter of a century) can consult Euler's correspondence with Clairaut in LEOO IVA, 5 [4].

7. Phil. Trans., 48, part 1 (1753) 1754, p. 287–288: Letters relating to a Theorem of Mr. Euler, of the Royal Academy of Sciences at Berlin, and F. R. S. for correcting the Aberrations in the Object-Glasses of refracting Telescopes: Mr. Euler's Letter to Mr. James Short, F. R. S., Berlin, 19 Juin, 1752, p. 292 (E 210; LEOO III, 6, p. 40). Lettre de Mr. Euler à Monsieur Dollond, Berlin, Juin 15, 1752, p. 293–296 (LEOO III, 6, p. 41–43).

As a result of an error in G. Eneström's index this publication has only one title [5].

8. This work was not published in Saint Petersburg until 1769–1771 (E367, E368, E404).

9. *Cicero*. Tusculanae disputations. V. 37.

References:

1. *Herzog J. W.* Adumbratio eruditorum Basiliensium meritis apud externos olim hodieque celebrium, appendicis loco Athenis Rauricis addita. Basiliae: Serini, 1780. P. 165–167.

2. *Delisle J.-N.* Explication de la carte des nouvelles découvertes au nord de la Mer du Sud. Paris: Buache, 1752.

3. Correspondence Euler–Wettstein // Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers. Vol. 3. / Ed. A. P. Juskevic, E. Winter. P. 256–366.

4. Correspondance de Leonhard Euler avec A. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange / Ed. A. P. Juškevič et R. Taton. Bâle: Birkhäuser, 1980. (= LEOO IVA, 5.)

5. *Eneström G.* Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers, bearbeitet von Gustaf Eneström. Leipzig: Teubner, 1910.

Андреас Кляйнерт, Мартин Маттмюллер
Галле-Виттенберг, Германия
Базель, Швейцария

«Opera Omnia» Леонарда Эйлера: Проект века[*]

За время своей долгой жизни в науке математик и естествоиспытатель Леонард Эйлер опубликовал более чем 500 научных статей и более двух десятков книг. После себя он оставил более 300 статей в рукописях, большинство из них было напечатано, правда, произвольно и несистематично, в последующие 80 лет. Несколько проектов публикации собрания сочинений Эйлера в XIX веке не смогли осуществиться, и только в 1907 г., когда праздновалась 200-летняя годовщина со дня рождения Эйлера, по инициативе Фердинанда Рудио была основана комиссия по изданию трудов Эйлера под эгидой Швейцарского Общества естествоиспытателей (ныне Швейцарская Академия наук). Текущий год трехсотлетия Эйлера — столетняя годовщина начала издания собрания сочинений Эйлера, которое почти завершено.

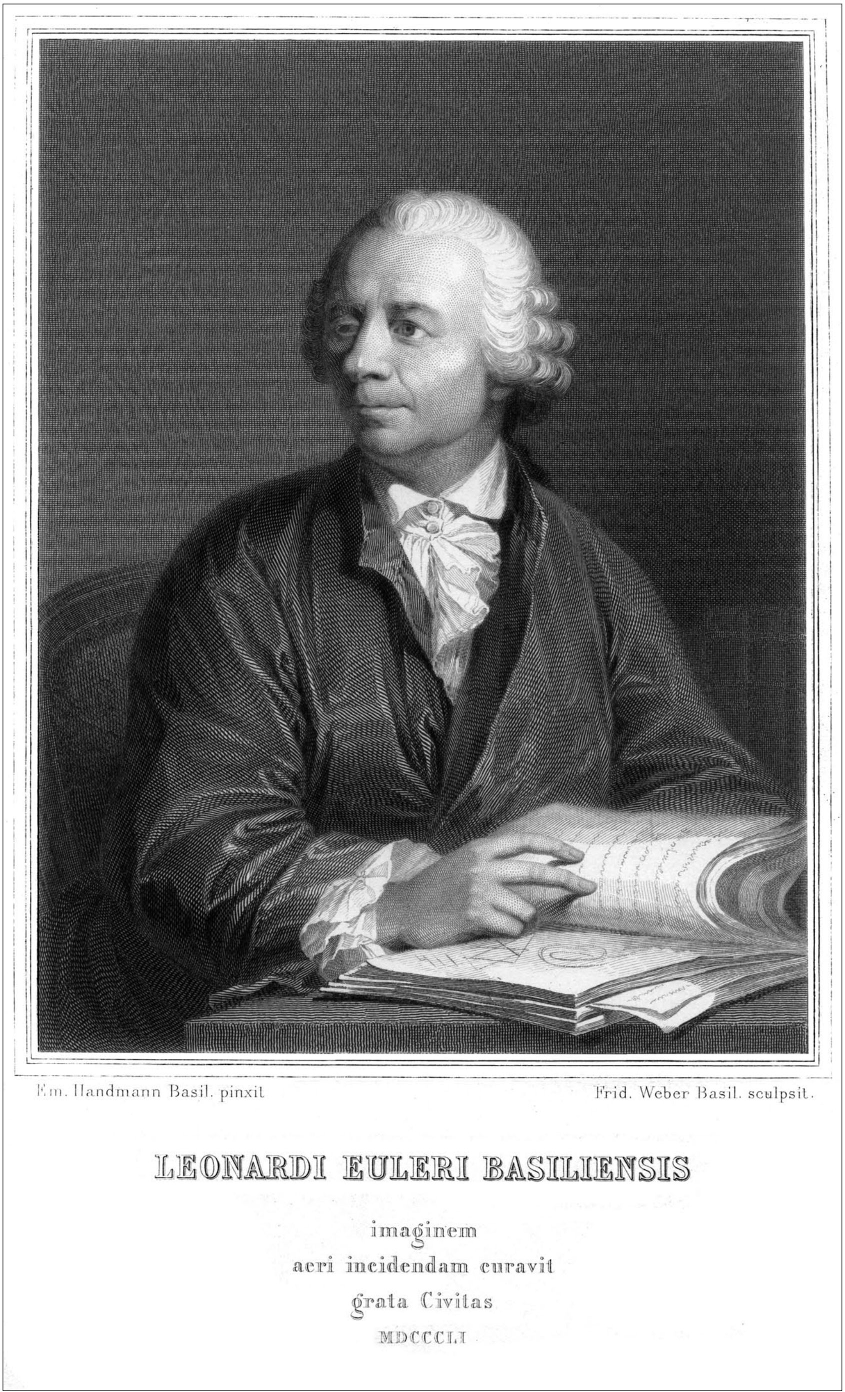
Жизнь и труды Эйлера

Леонард Эйлер родился в Базеле 15 апреля 1707 года. В возрасте 30 лет он поступил в Базельский университет, где быстро преуспел в математике и физике. В 1727 году он был принят в только что основанную Императорскую Академию наук в Санкт-Петербурге. В 1741 он перебрался в Берлинскую академию, возрожденную Фридрихом II, а в 1766 вернулся в Петербург, где и умер 18 сентября 1783 года.

Эйлер был необычайно плодовитым ученым: работы, опубликованные в течение его жизни, содержат более 500 научных статей, опубликованных преимущественно в журналах самых престижных научных академий Европы. Хотя он никогда не имел официального статуса преподавателя, его перу принадлежат серьезные учебники по самым разнообразным предметам, включая дифференциальное и интегральное исчисление, механику, баллистику и акустику, астрономию, теорию музыки и кораблестроение, а также «Письма к немецкой принцессе», трехтомный компендиум современных ему взглядов на естественную науку. Поток творческой активности Эйлера не ослаб даже после почти полной потери зрения в 1771 г. Несомненно, Эйлер принадлежит к плеяде величайших ученых всех времен. Его работы представляют собой уникальный сплав широких интересов и глубоких прозрений. Они отражают его способность находить оригинальные пути решения проблем и невероятную настойчивость в следовании своим идеям, а также демонстрируют истинное и благожелательное призна-

---

[*] Редколлегия сборника благодарит редакцию Бюллетеня Европейского Математического общества за предоставленную возможность опубликовать перевод на русский язык статьи *Kleinert A., Mattmüller M.* Leonhardi Euleri Opera Omnia: a centenary project // EMS Newsletter. September 2007. P. 25–31.



Em. Handmann Basil. pinxit

Frid. Weber Basil. sculpsit.

LEONARDI EULERI BASILIENSIS

imaginem
aeri incidendam curavit
grata Civitas
MDCCCLI

Леонард Эйлер. Гравюра Фридриха Вебера (1851) с портрета Хандмана (1756) в Старом Актовом зале Базельского университета. Публикуется благодаря любезности Эмиля А. Феллмана, Базель ние достижений его предшественников и современников. Эйлера, в основном, помнят как ведущего математика своего времени, но его работы также внесли новаторский вклад в физику, астрономию и инженерное дело. Более того, в его огромной переписке мы видим удивительно глубокие прозрения по поводу дальнейшего развития его идей и меткие замечания о научном сообществе XVIII столетия. Незадолго до своей смерти Эйлер предсказал, что Петербургской академии потребуется по меньшей мере 20 лет, чтобы опубликовать все оставшиеся после него рукописи. Оказалось, что этот прогноз был слишком оптимистичным: только в 1830 г., почти через 50 лет после его смерти, запас неопубликованных работ Эйлера истощился. В 1844 г. правнук Эйлера Пауль-Генрих Фусс нашел на чердаке еще 60 рукописей, которые он опубликовал в 1862 в двух томах под названием «Opera postuma». В начале XX века шведский математик Густав Энестрём составил общую опись произведений Эйлера. Эта опись, на которую обычно ссылаются как на «Список Энестрёма», была опубликована между 1910 и 1913 гг. Этот список из 866 публикаций включает несколько писем, опубликованных в XIX – начале XX века, которые, собственно, не являлись печатными трудами Эйлера. Если их опустить, количество публикаций Эйлера, исключая переиздания, переводы и т. п., составляет около 850 наименований. Со времени опубликования «Списка Энестрёма» только для одной дополнительной публикации было установлено авторство Эйлера: это анонимно опубликованный доклад о гравитации, который не привлек внимания шведского математика.

Первые попытки издания трудов Эйлера

Первые попытки опубликовать собрание сочинений Эйлера относятся к 1830 году. Два таких начинания возникли одновременно. Первое из них предпринял Пауль-Генрих Фусс, который был непременным секретарем Петербургской Академии наук. Хотя Фусса в его начинании поддерживали многие видные математики, такие как Карл Густав Якоби, проект, в конце концов, был оставлен, когда оказалось, что необходимые затраты превосходят финансовые возможности Академии. Единственным результатом предприятия Фусса и Якоби была публикация в 1849 году двух томов «Commentationes arithmeticae», которые включали 94 уже опубликованных статьи и 5 неопубликованных рукописей. В то же самое время, группа бельгийских математиков предприняла аналогичный проект. Они оказались более удачливыми, чем их российские коллеги, и 5 томов этого издания были все-таки напечатаны (Œvres complétes de L. Euler, 5 vol., Bruxelles, 1838–1839). Однако, это издание подверглось резкой критике, в частности, со стороны бельгийского историка математики Анри Босмана, который охарактеризовал его как весьма неудачную работу [1]. Так как издатели намеревались сделать работы Эйлера доступными для более широкой публики, они произвольно обращались с оригинальными текстами, даже когда оригинал был написан на французском языке. Все эти издатели работ Эйлера имели одну общую черту: их главной целью было сделать работы Эйлера доступными для восприятия современных ученых, и, в частности, математиков. Они считали, что произведения Эйлера будут и дальше стимулировать математические исследования, и что математики должны изучать его работы с неослабевающим упорством, следуя знаменитому призыву Лапласа: «Читайте Эйлера, читайте Эйлера, он учитель всех нас». В начале XX века, когда приближалась 200-летняя годовщина Эйлера, Российская Академия наук выступила с новой инициативой публикации собрания сочинений Эйлера. Учитывая неудачи предыдущих попыток, русские ученые занялись поисками коллег, которые могли бы разделить с ними труды и расходы. Конечно, одной из первых организаций, о которой они подумали в связи с Эйлером, была Прусская Академия наук в Берлине, где Эйлер проработал 25 лет. Сначала берлинские академики отнеслись к этому плану с большим энтузиазмом, но затем оказалось, что русские хотят разделить работу следующим образом: они публикуют труды по математике, а работы по физике оставляют немцам. Тогда Берлинская академия обратилась за советом к одному из своих самых выдающихся членов, Максу Планку. В своем знаменитом заявлении Планк отметил, что, возможно, математики и черпают вдохновение из работ Эйлера, но это утверждение уже не является справедливым для физиков. Он заявил, что публикация работ Эйлера по физике «не входит в интересы физики как науки нашего времени», и, в результате этого заявления, Прусская академия отказалась участвовать в финансировании проекта. А так как осуществление всего издания было бы слишком дорого для Российской академии, эта инициатива также потерпела неудачу.

Эйлеровский комитет и начало издания «Opera omnia»

Тем временем, профессор математики Цюрихского политехнического института Фердинанд Рудио, неустанно продолжал продвигать инициативу издания Эйлеровских работ и, в конце концов, добился успеха. При каждом удобном случае, а особенно на Первом международном съезде математиков, который состоялся в Цюрихе в 1897 г., Рудио убеждал мировое математическое сообщество воздать справедливость великому ученому, предприняв издание собрания его сочинений. Когда город Базель отмечал двухсотлетнюю годовщину Эйлера в 1907 г., Рудио выступил с пламенной речью, в которой он взывал к швейцарскому патриотизму и международной солидарности в деле издания трудов Эйлера: «Швейцария всегда будет благодарна академиям Берлина и Санкт-Петербурга за то, что они дали нашему Эйлеру, для которого его родная страна была слишком мала, возможность исполнить дело своей жизни»[1].

Речь Ф. Рудио была адресована, в основном, представителям Швейцарского Общества естествоиспытателей (Schweizerische Naturforschende Gesellschaft, SNG, ныне Швейцарская Академия наук, SCNAT) и представителям академий Берлина и Санкт-Петербурга, которые присутствовали на церемонии. Эти слова упали на благодатную почву. Общество естествоиспытателей решило, что издание трудов Эйлера является для них долгом чести, и, в результате, был организован комитет (Euler-Kommission), ответственный за реализацию проекта. Год спустя этот план был горячо поддержан на IV международном конгрессе математиков в Риме. В официальной резолюции конгресса было заявлено, что новое и полное издание трудов Эйлера является чрезвычайно важным для чистой и

Vollſtändige
Anleitung
zur
Algebra
von
Hrn. Leonhard Euler.

Zweyter Theil.
Von Auflöſung algebraiſcher Gleichungen
und der unbeſtimmten Analytic.

St. Petersburg.
gedruckt bey der Kayſ. Acad. der Wiſſenſchaften 1770.

Титульный лист учебника Эйлера по алгебре, на немецком языке (1770), часть 2. (Архив Эйлера в Базеле)

прикладной математики. Первым шагом Эйлеровского комитета была попытка найти финансирование. Они напечатали так называемые Zeichnungsscheine (подписные листы) и отправили их в общественные организации, на предприятия, в компании и частным лицам. Адресатов этих подписных листов просили указать сумму, которую они были бы готовы внести; им также сообщалось, что решение общества начать этот проект существенно зависит от общей суммы пожертвований, обещанной дарителями. Результат этой кампании был впечатляющим: 93 500 швейцарских франков было предложено дарителями в Швейцарии и 31 500 франков получено из других стран. Огромное количество частных лиц подписалось на издание заранее, а три академии — Берлина, Парижа и Санкт-Петербурга — подписались каждая на 40 экземпляров. Общая сумма, обещанная подписчиками, оказалась в три раза больше суммы пожертвований, т. е. около 300 000 франков. Таким образом, средств хватало, по крайней мере, на среднесрочную перспективу. Деньги были не единственным условием реализации такого проекта; требовалось определенное количество компетентных специалистов, которые могли и хотели бы сделать требуемую работу. В этом отношении Эйлеровскому комитету опять повезло: 20 математиков, имевших международную известность, сразу же согласились быть редакторами одного или нескольких томов; в их числе были Жак Адамар из Парижа, Густав Энестрём из Стокгольма, Туллио Леви-Чивита из Падуи, Герхард Ковалевский из Праги и Генрих Вебер из Страсбурга (ему суждено было стать редактором первого тома, вышедшего в 1911 году). Была организована редакционная комиссия, состоящая из ученых, которые работали над отдельными томами. Когда в 1908 г. работа началась, комиссия оптимистически предположила, что всего выйдет из печати 43 тома, и отдельный том будет стоить не более 25 франков. Однако через несколько лет после публикации «Указателя» Энестрёма оказалось, что комиссия сильно недооценила размер наследия Эйлера. В 1913 г. количество томов увеличили до 66, а в последующие годы их пришлось увеличить еще раз — до 72.

Издание было разделено на три серии: 1. Математика (29 томов), 2. Механика и астрономия (31 том), 3. Физика и прочие дисциплины (12 томов). Первый том вышел в 1911 г., он содержал Эйлеровское «Vollständige Einleitung zur Algebra» («Полное руководство по алгебре» — нем.) с дополнениями Лагранжа и «Похвальное слово Эйлеру» Николая Фусса. До начала первой мировой войны было опубликовано двенадцать томов.

Завершающий этап издания собрания сочинений

Конечно же, импульс, данный огромному предприятию энтузиазмом его основателей, не был достаточен для того, чтобы легко преодолеть все препятствия, которые возникали в течение XX века. Первое поколение издателей передало эстафету (называем здесь немногих известных участников) математикам Георгу Фаберу, Анри Дюлаку, Рудольфу Фютеру и Константину Каратеодори, а также физикам Шарлю Блану и Клиффорду Трузделлу. Главными редакторами, вслед за Рудио, были Андреас Шпейзер (1928), затем Вальтер Хабихт (1965) и Ганс-Кристоф Имхоф (1985). Издание трудов Эйлера было затруднено и замедлено не только двумя мировыми войнами: в 1931 г. банк Крист-Павачини, где Эйлеровский комитет держал свои вклады, обанкротился, и комитет потерял 80 000 франков. Пришлось также несколько раз менять издательство по политическим и финансовым причинам. До 1935 г. издатель Тейбнер в Лейпциге был ответственным за издание. Тома, вышедшие между 1935 и 1950 гг., были напечатаны совместно Тейбнером и Ореллом Фюсли (Цюрих). С 1952 до 1974 гг. Орелл Фюсли был единственным издателем, а в 1975 г. издание было передано Биркхойзеру (Базель). Со временем становилось все сложнее найти квалифицированных редакторов, а математики, читающие по-латыни, быстро превращались в исчезающий вид.

Это привело к соглашению о том, что математиков и физиков, как редакторов, все больше будут замещать профессиональные историки науки, такие как Эмиль Феллъман, Отто Флекенштейн, Клиффорд Трузделл, Давид Шпейзер, Эрик Айтон, Патрисия Раделе-Де Грав и Карин Шемла. В связи с изменениями в редколлегии, состав издания также претерпел изменения. В начале издания его инициаторы хотели сделать его полезным, в основном, для ученых, и, в особенности, для математиков, но, по некоторым причинам, это назначение потеряло

Стеллаж с «Opera Omnia» в архиве Эйлера в Базеле

свою важность. С другой стороны, издание трудов Эйлера все больше и больше приобретало значение ценного справочного издания для профессиональных историков науки, которые, в определенной степени, заменили математиков как в роли читателей, так и в роли редакторов. Вследствие этой перемены последние тома характеризуются более основательными вводными замечаниями и многочисленными сносками и комментариями. Для инициаторов издания трудов Эйлера и для первого поколения редакторов главной задачей издания было сделать оригинальный текст широко доступным, комментарии были сведены к минимуму. В одном из параграфов редакторского плана 1910 г. было ясно сказано, что примечания не должны превращаться в длинные исторические трактаты. Это первоначальное здравое намерение постепенно забывалось, по мере того как редакторы-историки замещали редакторов-ученых. Некоторые из них воспользовались случаем, чтобы продемонстрировать все свои знания и эрудицию, существует даже один 435-страничный том (II/ 11. 1, издание Трузделла), который не содержит ни одной строчки, написанной Эйлером, зато в нем помещен исторический трактат, по общему признанию, очень важный, об истории изучения упругих тел между 1639 и 1788 гг. Распределение издания томов по годам дано в следующей таблице:

1911–1912: 12 томов	1947–1960: 21 том
1915–1919: 2 тома	1961–1979: 16 томов
1920–1927: 8 томов	1980–1990: –
1928–1931: –	1990–2004: 3 тома
1932–1940: 4 тома	2008–2009: 2 тома (?)
1941–1946: 4 тома	

Всего 72 тома

В этом году, который является годом 300-летия Эйлера и столетнего юбилея Эйлеровского комитета, издание печатных работ Эйлера в «Opera Omnia» почти завершено. Пропущенные тома 26 и 27 серии II, содержащие работы Эйлера по теории возмущений в астрономии, сейчас готовятся к печати. Надеемся, что редактор Андреас Верден закончит свою рукопись в этом году и тома выйдут в 2008–2009 гг.

Издание писем и рукописей Эйлера

В первом проекте 1910 г. было решено, что научная корреспонденция Эйлера должна быть включена в публикацию «Opera Omnia». Но в плане не было четко указано, что считать «научной корреспонденцией», и было решено отложить издание на некоторое время. В первую очередь, внимание уделялось напечатанным трудам Эйлера. Дошедшая до нас корреспонденция ученого содержит примерно 3100 единиц, включая письма Эйлера и письма к нему примерно 300 корреспондентов, в том числе около 1000 писем, написанных самим Эйлером. Большинство из них относятся ко времени, когда Эйлер жил в Берлине (1741–1766). Вот люди, с которыми Эйлер переписывался больше всего (в скобках указано, в числителе, количество писем, написанных Эйлером и, в знаменателе, число писем, адресованных ему): Даниил Бернулли (19/81), Христиан Гольдбах (102/94), Пьер Луи Моро де Мопертюи (124/5), Герхард Фридрих Мюллер (111/101), Иоганн Даниил Шумахер (176/131) и Иоганн Андреас Сегнер (0/159). Только трое из них интересны историкам математики: Бернулли, Гольдбах и Сегнер. Остальные трое в основном пишут о хозяйственных делах в своих академиях: Шумахер и Мюллер занимали руководящие посты в Петербургской академии, Мопертюи был президентом Прусской академии. Первая попытка напечатать часть корреспонденции Эйлера в XX веке была предпринята в 1960-х годах. Она не имела отношения к изданию «Opera Omnia», а возникла в результате сотрудничества Ленинградского отделения Академии наук СССР и Академии наук ГДР, которая считала себя правопреемницей Прусской академии. В связи с 250-летием со дня рождения Эйлера эти две академии решили опубликовать все письма Эйлера, относящиеся к их сотрудничеству в XVIII веке. В результате три тома, содержащие более шестисот писем, были напечатаны под редакцией А. П. Юшкевича и Эдуарда Винтера в 1959–1976 гг. под названием «Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers». (Берлинская и Петербургская Академии наук в переписке Леонарда Эйлера — нем. — *Прим. перев.*). В 1965 г. эти же редакторы осуществили переиздание переписки Эйлера и Гольдбаха, которая уже была издана Фуссом в XIX веке. Затем Академия наук СССР напечатала еще три тома корреспонденции Эйлера: «Письма к ученым» (под редакцией Т. Кладо и др. в 1963 г.; содержит сорок девять писем Эйлера к девятнадцати ученым); «Relations scientifiques russo-françaises» (Русско-французские научные связи — фр. — *Прим. перев.*, под редакцией А. П. Юшкевича и др., изд. в 1968 г.; включает переписку Эйлера с Делилем); и «Переписка» (под редакцией А. П. Юшкевича и др., изд. в 1967 г.; содержит указатель с кратким содержанием всей корреспонденции, находящейся в Санкт-Петербургском архиве). Воодушевленный работой советских и немецких архивных работников, Швейцарский Эйлеровский комитет решил, наконец, в 1967 г. начать издание дополнительной серии «Opera Omnia», которая должна была содержать переписку Эйлера и его рукописное наследие. Планировалось, что эта серия IV будет разделена на две части IVA и IVB: IVA — для писем, а IVB — для неопубликованных рукописей. Так как большинство оригиналов писем, адресованных Эйлеру, хранились в Ленинградском архиве Академии наук СССР, и значительное число специалистов по Эйлеру жили в Советском Союзе, новая серия IV была основана как совместный проект Швейцарской и Советской академий. Была создана вторая редакционная комиссия, состоящая из четырех советских и четырех швейцарских представителей. Эта комиссия, которая должна была отвечать только за издание серии IV, возглавлялась Вальтером Хабихтом, а затем, с 1985 г., Эмилем Фелльманом, который являлся также директором архива Эйлера в Базеле. Первым решением этой комиссии было отложить издание серии рукописей IVB и сосредоточиться на переписке. Следующие рекомендации были установлены для публикации переписки Эйлера:

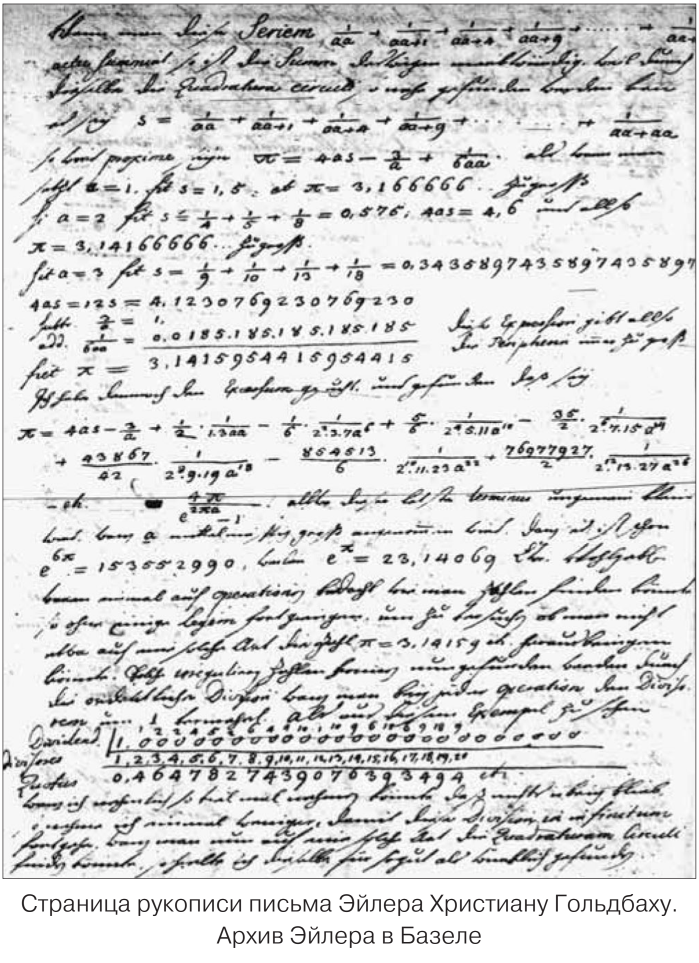
Переписку публиковать не в общем хронологическом порядке, а с тем, чтобы каждый том включал переписку с одним или более корреспондентами.

Принятые ранее решения, особенно касающиеся научного или ненаучного характера какого-либо письма, пересматривались несколько раз, следовательно, надо печатать все письма к определенному корреспонденту и от него.

Для каждого тома будет определен «рабочий язык» для введения, сносок и комментариев. Как общее правило, это будет язык большинства писем в соответствующем томе. Соответственно, немецкий был выбран рабочим языком для томов II, III и VIII, а французский — для томов V, VI, и VII.

Тексты писем публикуются полностью, включая слова признательности в начале и в конце, которые часто опускались в предыдущих изданиях; публикация осуществляется на языке оригинала. Только письма, написанные на латыни, будут дополнительно переведены на рабочий язык данного тома.

Исключение было сделано для корреспонденции Гольдбаха. Редакционная комиссия и издатели были убеждены, что эта переписка содержит так много идей и предложений, что в интересах современных математиков (особенно занимающихся теорией чисел) следует сделать их доступными мировому сообществу ученых, а не только историкам науки. Поэтому было решено сделать английский рабочим языком этого тома (том IVA/4) и перевести все письма на этот язык, в дополнение к текстам оригиналов, написанных на необычной смеси немецкого, латыни и французского. Первый том серии IVA вышел в 1975 г.; это опись всей корреспонденции Эйлера, известной в то время. К каждому письму прилагается краткое описание и некоторая информация о дате написания, языке, существующих копиях, месте нахождения оригинала и наличии предыдущей публикации. Через 5 лет вышел первый том собственно переписки: том IVA/5, включающий переписку Эйлера с Клеро, Даламбером и Лагранжем, вышел под редакцией Рене Татона и А. П. Юшкевича. В 1986 г. Пьер Констабель, Эдуард Винтер, А. Т. Григорьян и А. П. Юшкевич опубликовали переписку Эйлера с Мопертюи и Фридрихом II (том IVA/6), а в 1998 г. том IVA/2 представил переписку Эйлера с Иоганном и Николаем Бернулли. Том вышел под редакцией Эмиля Фелльмана и Г. К. Михайлова. Из-за проблем с финансированием и с поиском компетентных редакторов, дальнейшие тома из серии IVA не выходили с 1998 г. В фонде, созданном в начале XX века и время от времени пополнявшемся средствами от пожертвований и от продажи опубликованных томов, изначально не было заложены расходы на выдачу зарплаты. Его целью было покрыть расходы на собирание источников и на собственно печатание томов. Но никому не платили в то время за помощь — редакторы серий I–III были, в основном, математиками, которые имели постоянную работу как исследователи или университетские профессора и считали за честь внести свой вклад в издание трудов Эйлера. В ходе издания переписки становилось все более сложно найти вполне компетентных редакторов: просто не существует достаточного количества людей, которые обладают специальными навыками, требуемыми для выполнения этой работы. Они должны быть знакомы с математикой, физикой и/или астрономией XVIII века, хорошо знать латынь, французский и немецкий, и уметь разбирать скоропись XVIII века, что само по себе является сложной задачей. Выяснилось, что все редакторы и большинство сотрудников, принимавших участие в работе над перепиской, были университетскими профессорами в отставке, некоторые



Страница рукописи письма Эйлера Христиану Гольдбаху. Архив Эйлера в Базеле из них начали сотрудничать с Эйлеровским комитетом незадолго до ухода на пенсию, полагая, что вскоре освободятся от своих обязанностей и смогут сосредоточиться на этой работе.

В принципе, это было хорошей идеей: у этих людей имеется большой опыт работы с такими материалами, к тому же они финансово независимы. Главным недостатком данного начинания, однако, является то, что у Эйлеровского комитета нет рычагов для того, чтобы мотивировать сотрудников закончить работу в срок и, к сожалению, многие из них умирают до того, как работа сделана. Типичный пример – история тома IVA/7, выход которого откладывался из-за целого ряда злоключений. Около 20 лет назад одного из авторов (А. К.) редакторы А. П. Юшкевич и Рене Татон попросили заняться перепиской Эйлера с женевским физиком Жоржем Луи Лесажем (9 писем), чтобы напечатать их в этом томе. Он представил рукопись на рассмотрение в 1992 г. В это время Пьер Специали, находящийся на пенсии математик и историк математики в Женевском университете, работал над перепиской с Габриэлем и Филибером Крамером. В 1993 г. Юшкевич умер, и, по просьбе Рене Татона, Андреас Кляйнерт был назначен соредактором всего тома. Специали умер в 1995 г., а Татон, который занимался несколькими письмами в этом томе, скончался в 2005 г., не говоря уже о других покойных сотрудниках, таких как Мирко Грмек, Розелин Рей и Пьер Костабель, которые оставили горы неоконченных рукописей. В прошлом году Эйлеровский комитет, наконец, решил поручить эту работу молодому ученому Зигфриду Боденману, предоставив ему полставки в Базельском университете. Французский является его родным языком, он вырос около Женевы, и мы надеемся, что он закончит работу к концу 2007 г. Получить эти полставки было, однако, нелегкой задачей. Чтобы велась работа и над другими важными томами, Комитет добился выделения еще двух частично оплачиваемых мест: Мартин Маттмюллер, являющийся в то же время секретарем Комитета, принимает участие в редактировании переписки Эйлера и Гольдбаха вместе с Гюнтером Фраем, отставным профессором университета Квебека и специалистом по теории чисел. Другой оплачиваемый редактор Томас Штейнер работает над перепиской с Сегнером. В связи с огромным количеством писем, которые остаются неопубликованными, перспективы на будущее нельзя назвать многообещающими. В настоящий момент обеспечено лишь финансирование томов IVA3 (Даниил Бернулли), IVA4 (Гольдбах), IVA7 (различная корреспонденция на французском языке) и IVA8 (переписка Эйлера с Сегнером и другими учеными из Галле). Надеемся, что все эти тома выйдут до 2012 г. Но Швейцарский национальный фонд науки, который сейчас оплачивает большую часть редакторской работы, возможно, не будет финансировать сотрудников после 2012 г. Это печально, потому что некоторые из неопубликованных писем являются настоящим сокровищем. Например, можно упомянуть переписку Эйлера с Кнутценом, которая может составить целый том в серии IVA. Мартин Кнутцен (1713–1751) умер в молодом возрасте, и, помимо его опубликованных работ, у нас очень мало источников и документов о нем. Однако, будучи профессором философии Кенигсбергского университета, Кнутцен был одним из самых влиятельных учителей Иммануила Канта, и, насколько нам известно, именно благодаря Кнутцену Кант познакомился с ньютоновской физикой и философией Лейбница. Его письма к Эйлеру затрагивают физику, астрономию, философию, а также особенности частной жизни Кнутцена и различные события в Кенигсбергском университете. Переписка состоит из 72 писем Кнутцена и двух писем Эйлера. Таким образом, существуют важные и интересные части переписки Эйлера, которые мы, вероятно, не сможем опубликовать на той же основе, как те четыре тома, которые находятся в печати, и те четыре, которые в настоящее время готовятся. Более того, о серии IVB, которая должна содержать все остальное рукописное наследие Эйлера, ничего нельзя сказать с уверенностью. Такова уж судьба таких значительных проектов, как издание собрания сочинений Эйлера, что их конечные цели, методы осуществления и доступные средства постоянно меняются. Итак, оставим ли мы проект, задуманный в 1907 г., неоконченным? И да и нет. Если не найдется какой-то новый путь финансирования редакторской работы и собственно печатания, новые тома не будут добавлены к уже имеющемуся ряду «Leonhardi Euleri Opera Omnia» после 2012 г. Однако, новые возможности публикации в электронном виде дают нам шанс достигнуть конечной цели, поставленной Фердинандом Рудио и его коллегами, т. е. сделать все написанное Эйлером доступным для научного сообщества. В настоящее время Эйлеровский комитет работает над проектом представить это важное наследие в электронной базе данных, сканированных в Интернете; решение этой задачи стало возможным благодаря надежной описи. Надеемся, что задача, поставленная математическим сообществом 100 лет назад, будет выполнена через несколько лет, на пользу математикам XXI века и историкам науки, и также станет памятником неувядающей славы Леонарда Эйлера.

Примечания:

1. «Швейцария навсегда сохранит чувство глубокой благодарности и признательности Петербургской и Берлинской академиям за то, что они предоставили нашему Эйлеру, для которого собственная Родина была слишком мала, бо́льшие возможности, и он смог исполнить дело своей жизни в ничем не омраченных условиях, испытывая творческий подъем и радость созидания». В ежеквартальном журнале Цюрихского Общества естествоиспытателей [2].

Литература:

1. *Bosmans H.* Sur une tentative d'édition des oeuvres complétes de L. Euler faite à Bruxelles en 1839. Louvain, 1909.
2. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft zu Zürich. 1907. Bd. 52. S. 541.

Перевод с английского языка А. Ю. Емельянова

Перечень изданных томов Полного собрания сочинений Леонарда Эйлера («Leonhardi Euleri Opera Omnia»)

Составители: М. Маттмюллер, Л. И. Брылевская

Серия I

Труды по математике (в 29 томах)

Том	Название	Ч.	Номера содержащихся в томе работ по списку Энестрёма	Языки издан.	Редакторы	Год издан.	К-во стр.
1	Vollständige Anleitung zur Algebra J. L. Lagrange: Additions à l'analyse indéterminée		387 388	Н Ф	H. Weber	1911	XCVI, 651
2	Commentationes arithmeticae	1	26 29 36 54 98 100 134 152 158 164 167 175 191 228 241 242 243 244 253 255 256 262 270 271 272 279	Л Ф	F. Rudio	1915	XXXVIII, 611
3	Commentationes arithmeticae	2	283 A9 323 369 394 405 427 428 445 449 451 452 454 461 466 467 474 498 708a 515 523 A31 541 542 552 554	Л Ф Н	F. Rudio	1917	XXXVIII, 543
4	Commentationes arithmeticae	3	556 557 558 559 560 564 566 586 591 596 598 610 683 696 699 702 708 713 715 716 718 719 725 732 739 744	Л	R. Fueter	1941	XXXIV, 431
5	Commentationes arithmeticae	4	748 753 754 755 758 763 764 769 772 773 774 775 776 777 778 792 793 796 797 798 799 Mss	Л Ф	R. Fueter	1944	XLVIII, 374
6	Commentationes algebraicae ad theoriam aequationum pertinentes		30 153 157 170 282 310 370 395 406 407 450 532 540 631 632 643 644 711 728 794 808 819	Л Ф	F. Rudio, A. Krazer, P. Stäckel	1921	XXX, 509
7	Commentationes algebraicae ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes		53 201 309 313 334 335 338 403 412 473 476 488 530 599 600 628 738 795 811 812 813 Mss	Ф Л Н	L. G. du Pasquier	1923	LVIII, 580

8	Introductio in analysin infinitorum	1	101	Л	A. Krazer, F. Rudio	1922	XII, 392
9	Introductio in analysin infinitorum	2	102	Л	A. Speiser	1945	L, 403
10	Institutiones calculi differentialis		212	Л	G. Kowalewski	1913	VI, 676
11	Institutiones calculi integralis	1	342	Л	F. Engel, L. Schlesinger	1913	XVI, 462
12	Institutiones calculi integralis L. Mascheroni: Adnotationes ad calculum integralem	2	366	Л	F. Engel, L. Schlesinger	1914	XVI, 542
13	Institutiones calculi integralis	3	385	Л	F. Engel, L. Schlesinger	1914	XVIII, 508
14	Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes	1	19 20 25 41 43 46 47 55 61 63 71 72 74 122 123 125 128 130 189 190 246 247	Л Ф	C. Boehm, G. Faber	1925	X, 617
15	Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes	2	275 280 281 326 352 393 432 447 453 465 477 489 507 522 550 551 553 555 561 562 565 575 583 584 592 593 597	Л Ф	G. Faber	1927	X, 722
16.1	Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes	3/1	613 616 617 636 637 642 652 655 661 663 664 684 685 686 703 704	Л	C. Boehm	1933	X, 355
16.2	Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes	3/2	705 706 709 710 722 726 736 742 743 745 746 747 750 768 809 810 819	Л	C. Boehm	1935	CXVI, 332
17	Commentationes analyticae ad theoriam integralium pertinentes	1	59 60 162 163 168 254 321 391 421 462 463 464	Л	A. Gutzmer	1914	VIII, 457
18	Commentationes analyticae ad theoriam integralium pertinentes	2	475 499 500 521 539 572 587 588 589 594 606 620 621 629 630 635 640 651 653	Л Ф	A. Gutzmer, А. А. Ляпунов	1920	XII, 475
19	Commentationes analyticae ad theoriam integralium pertinentes	3	656 657 662 668 669 670 671 672 673 674 675 688 689 690 694 695 701 707 721 752 807 816 819	Л Ф	А.А. Ляпунов, A. Krazer, G. Faber	1932	LXVIII, 494

20	Commentationes analyticae ad theoriam integralium ellipticorum pertinentes	1	28 52 154 211 251 252 263 261 264 273 295 345 347 448	Л	A. Krazer	1912	XII, 371
21	Commentationes analyticae ad theoriam integralium ellipticorum pertinentes	2	506 581 582 590 605 624 633 638 639 645 676 714 780 781 782 783 817 818 819 Mss	Л	A. Krazer	1913	X, 381
22	Commentationes analyticae ad theoriam aequationum differentialium pertinentes	1	10 11 31 44 45 48 51 62 70 95 188 236 245 265 269 274 284	Л	H. Dulac	1936	XVI, 420
23	Commentationes analyticae ad theoriam aequationum differentialium pertinentes	2	285 319 322 429 430 431 595 622 650 677 678 679 680 681 687 700 720 724 734 737 741 751 779 784 785 856	Л Ф	H. Dulac	1938	IV, 455
24	Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes...		65	Л	C. Carathéodory	1952	LXIV, 308
25	Commentationes analyticae ad calculum variationum pertinentes		9 27 42 56 84 99 250 A10 296 297 420 444 501 727 731 735 740 759 760 761	Л Н	C. Carathéodory	1952	XXVIII, 343
26	Commentationes geometricae	1	73 135 147 148 192 230 231 324 325 A23 505 514 524 543 573 601 648 693 729 730 733 749 819	Л Ф Н	A. Speiser	1953	XXXVIII, 362
27	Commentationes geometricae	2	3 5 23 75 79 83 85 106 129 133 166 169 173 214 215 220 224 298 300	Л Ф	A. Speiser	1954	XLVIII, 400
28	Commentationes geometricae	3	333 346 368 390 392 408 419 422 423 433 490 491 492 513 563 574 602	Л Ф	A. Speiser	1955	XLVI, 381
29	Commentationes geometricae	4	604 609 611 623 646 647 654 665 666 667 691 692 697 698 712 757 767 771 814 815 819	Л	A. Speiser	1956	XLIV, 448

Серия II
Труды по механике и астрономии (в 31 томе)

Том	Название	Ч.	Номера содержащихся в томе работ по списку Энестрёма	Языки издан.	Редакторы	Год издан.	К-во стр.
1	Mechanica sive motus scientia analytice exposita	1	15	Л	P. Stäckel	1912	XIV, 407
2	Mechanica sive motus scientia analytice exposita	2	16	Л	P. Stäckel	1912	VI, 460
3	Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in huiusmodi corpora cadere possunt accomodata	1	289-1	Л	Ch. Blanc	1948	XXII, 327
4	Theoria motus corporum solidorum ... Statica.	2	289-2 823	Л	Ch. Blanc	1950	VIII, 359
5	Commentationes mechanicae. Principia mechanica		145 146 176 177 181 182 197 (186) 198 199 199a 200 824	Ф Л	J.O. Fleckenstein	1957	LIV, 326
6	Commentationes mechanicae ad theoriam motus punctorum pertinentes	1	1 6 12 13 21 24 86 97 299 301 328 337 A16	Л Ф	Ch. Blanc	1957	XXXVII, 302
7	Commentationes mechanicae ad theoriam motus punctorum pertinentes	2	436 437 438 503 516 517 518 533 534 544 614 615 625 717 756 765 766 770 826 827 828 829	Л Н	Ch. Blanc	1958	VIII, 327
8	Commentationes mechanicae ad theoriam corporum rigidorum pertinentes	1	22 69 82 143 144 160 161 195 257 291 292 A11 A17 336 382 434 435	Ф Л	Ch. Blanc	1964	VIII, 417
9	Commentationes mechanicae ad theoriam corporum rigidorum pertinentes	2	456 468 469 470 478 479 525 536 568 569 585 603 607 612 627 634 641 649 658 659 682 825	Л Н	Ch. Blanc	1968	XLII, 441

10	Commentationes mechanicae ad theoriam corporum flexibilium et elasticorum pertinentes	1	8 40 49 119 140 126 136 159 165 174 213 268 286 287 302 303 317 318 339	Л Ф	F. Stüssi, H. Favre	1947	X, 451
11.1	Commentationes mechanicae ad theoriam corporum flexibilium et elasticorum pertinentes	2/1	365 374 410 439 440 441 442 443 455 471 481 482 526 535 537 567 576 577 608 618 830 831	Л Ф	F. Stüssi, E. Trost	1957	X, 383
11.2	C. A. Truesdell. The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638–1788	2/2		A	C. A. Truesdell	1960	435
12	Commentationes mechanicae ad theoriam corporum fluidorum pertinentes Rational fluid mechanics 1687–1765	1	64 225 226 227 258 260 276 331 332	Л Ф A	C. A. Truesdell	1954	CXXVIII, 288
13	Commentationes mechanicae ad theoriam corporum fluidorum pertinentes	2	375 396 409 424 494	Л A	C. A. Truesdell	1955	CXX, 375
14	Neue Grundsätze der Artillerie Commentationes ad ballisticam pertinentes		77 217 411 853 Mss	H Л Ф	F. R. Scherrer	1922	XXX, 484
15	Commentationes mechanicae ad theoriam machinarum pertinentes	1	179 833 259 202 203 222 206 207 208	Ф Л	J. Ackeret	1957	LXII, 318
16	Commentationes mechanicae ad theoriam machinarum pertinentes	2	229 233 248 579 843 855 A2 A4 A12	Л Ф H	Ch. Blanc, P. De Haller	1979	XX, 327
17	Commentationes mechanicae ad theoriam machinarum pertinentes	3	93 96 194 235 238 249 277 278 288 330 480 508 509 510 832	ЛФ H	Ch. Blanc, P. De Haller	1982	LVIII, 312
18	Scientia navalis	1	110	Л	C. A. Truesdell	1967	VIII, 427
19	Scientia navalis	2	111	Л	C. A. Truesdell	1972	VIII, 459
20	Commentationes mechanicae et astronomicae ad scientiam navalem pertinentes	1	4 78 94 116 137 150 413 A15	Л Ф	W. Habicht	1974	LXII, 275

21	Commentationes mechanicae et astronomicae ad scientiam navalem pertinentes	2	415 A27 426 520 545	Ф Л	W. Habicht	1978	CCXLIV, 241
22	Theoria motuum Lunae, nova methodo pertractata		418	Л	L. Courvoisier	1958	XXX, 412
23	Sol et Luna	1	87 138 139 187	Л	L. Courvoisier, J. O. Fleckenstein	1969	LVI, 336
24	Sol et Luna	2	204 A19 371 399 401 485 486 504 836a 836 837 838	Л Ф Н	Ch. Blanc	1991	XXVII, 326
25	Commentationes astronomicae ad theoriam perturbationum pertinentes	1	112 120 193 232 A7 304 A14 327 A18 348	Л Ф	M. Schürer	1960	XVI, 331
26	Commentationes astronomicae ad theoriam perturbationum pertinentes	2	372 398 400 414 416 425 511 512 578 626 841	Л Ф	A. Verdun	[2009]	
27	Commentationes astronomicae ad theoriam perturbationum pertinentes	3	373 384 402 548 549 834 835	Л Ф	A. Verdun	[2009]	
28	Commentationes astronomicae ad theoriam motuum planetarum et cometarum pertinentes		37 38 39 58 66 105 389	Л Ф	L. Courvoisier	1959	XL, 332
29	Commentationes astronomicae ad praecessionem et nutationem pertinentes	1	131 171 180 223 A6 293 308 A22 458 472 519 538 547 840	Л Ф	L. Courvoisier	1961	LXXXVI, 421
30	Commentationes astronomicae ad praecessionem et nutationem pertinentes	2	14 18 50 113 114 115 117 132 141 155 A24 A25 A26 A29 172 185 397 483 484 495 496 497 529 570 571	Л Ф Н А	L. Courvoisier	1964	LXXX, 352
31	Commentationes mechanicae et astronomicae ad physicam cosmicam pertinentes		7 57 67 68 89 103 142 183 184 218 A8 A8a 527 546 619 839 850 851 CG	Л Ф А Н	E. J. Aiton, A. Kleinert	1996	CII, 378

Серия III
Труды по физике и смешанного содержания (в 12 томах)

Том	Название	Ч.	Номера содержащихся в томе работ по списку Энестрёма	Языки издан.	Редакторы	Год издан.	К-во стр.
1	Commentationes physicae ad physicam generalem et ad theoriam soni pertinentes		91 842 2 33 305 306 307 314 315 340 457 852	Ф Л Н	E. Bernoulli, R. Bernoulli, F. Rudio, A. Speiser	1926	XXVIII, 591
2	Einleitung zur Rechen-Kunst Commentationes ad physicam generalem pertinentes et miscellanea		17 35 205 205a 32 81 90 107 149 341 341a 723 790 790a 790c 854	Н Ф Л А Р	E. Hoppe, K. Matter, J. J. Burckhardt	1942	XX, 431
3	Dioptrica	1	367 386-1	Л	E. Cherbuliez	1911	VIII, 510
4	Dioptrica	2	386-2 404	Л	E. Cherbuliez	1912	VIII, 543
5	Commentationes opticae	1	88 104 127 151 178 209 216 219 221 234 329 349 A28 487 493 502	Ф Л	D. Speiser	1962	LX, 395
6	Commentationes opticae	2	118 196 210 239 240 266 A20 267 294 A13 311 312 316 320 350 351	Ф Л Н	E. Cherbuliez, A. Speiser	1962	XXX, 396
7	Commentationes opticae	3	353 354 355 356 357 358 359 360 361 363 364 446	Ф	A. Speiser	1964	XXX, 247
8	Commentationes opticae	4	376 377 378 379 380 381 383 459 460	Ф Л	M. Herzberger	1969	XXIV, 266
9	Commentationes opticae	5	844 844a 845 846 847 848	Ф Л	W. Habicht, E. A. Fellmann	1973	LXIV, 328
10	Commentationes physicae ad theoriam caloris, electricitatis et magnetismi pertinentes		34 124 A21 A1 A5 A3 108 109 237 849 362	Ф Л	P. Radelet-de Grave, D. Speiser, K. Chemla	2004	CXCV, 415
11	Lettres à une princesse d'Allemagne	1	343 344-1	Ф	A. Speiser	1960	LXXII, 312
12	Lettres à une princesse d'Allemagne Rettung der göttlichen Offenbarung. Eloge d'Euler par le Marquis de Condorcet	2	344-2 417 92	Ф Н	A. Speiser	1960	XX, 312

Серия IV
A: Переписка (Commercium epistolicum) (в 9 томах)

Том	Название	Издатели	Языки издания	Год издания	К-во стр.
1	Descriptio commercii epistolici. Beschreibung, Zusammenfassung der Briefe und Verzeichnisse	А.П.Юшкевич, В.И.Смирнов, W. Habicht.	Н	1975	XVIII, 666
2	Commercium cum Johanne (I) Bernoulli and Nicolao (I) Bernoulli	E. A. Fellmann, Г. К.Михайлов	Л Н	1998	X, 747
3	Commercium cum Daniele Bernoulli	E. A. Fellmann, Г. К.Михайлов	Н Л	[2012]	
4	Correspondence with Ch. Goldbach	G. Frei, M. Mattmüller	Н Л	[2010]	
5	Correspondance de Leonhard Euler avec A. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange	А. П. Юшкевич, R. Taton	Ф	1980	VIII, 611
6	Correspondance de Leonhard Euler avec P.-L. M. de Maupertuis et Frédéric II	P. Costabel, E. Winter, А. Т. Григорян, А. П. Юшкевич	Ф	1986	XII, 454
7	Correspondance avec L. Bertrand, Ch. Bonnet, J. Castillon, G. Cramer, Ph. Cramer, G. Cuenz, G. L. Lesage, J. M. von Loen et J. K. Wettstein	A. Kleinert, S. Bodenmann	Ф	[2009]	
8	Commercium cum J. A. Segner et aliis Halae degentibus	Th. Steiner, A. Kleinert	Л Н	[2011]	
9	Correspondance avec d'autres savants français	A. Kleinert, S. Bodenmann	Ф	[2011]	

Сокращения:

А — английский; Л — латинский; Н — немецкий; Ф — французский язык.

Материалы, отсуствующие в списке Енестрёма и получившие специальные обозначения:

Mss — ранее непубликовавшиеся заметки из записных книжек.

CG — «De Causa Gravitatis», мемуар анонимно опубликованный в Miscellanea Berolinensia (T. VII, 1743).

Номера опубликованных работ Эйлера 1–856 и A1–A31 приводятся по списку Энестрёма и встречаются однократно, за исключением № 819 — Opera Postuma (материал публикации распределен по шести томам LEOO). Со списком Энестрёма помимо уже указанного в статье Г. К. Михайлова издания (с. 21, п. 32 списка литературы) можно познакомиться в «Трудах Архива АН СССР», вып. 17:

Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. Т. 1. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 352–386.

В. Н. Васильев, Ю. Л. Колесников, Н. К. Мальцева, Т. В. Шеламова
Санкт-Петербург, Россия

Эйлер в российском Интернете XXI века

Abstract: Regarding access to Internet, our reality differs greatly from that of any previous historical period. This article shows how often and where Euler's name occurs on the "Globe net" of such a country as Russia: where in the virtual world can we find information about the tricentennial of the great mathematician?

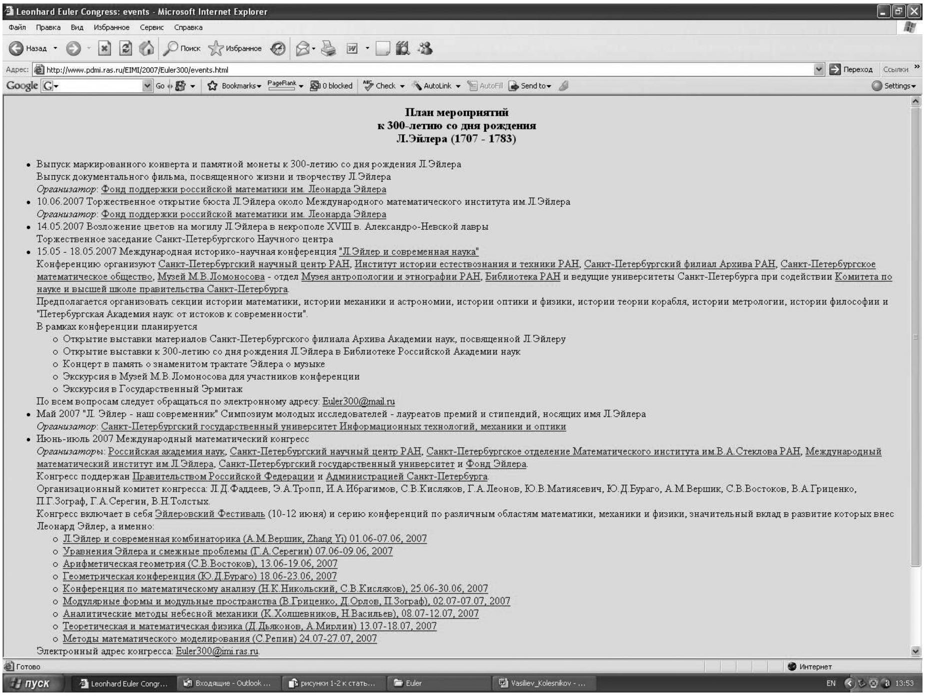
Ознакомившись лишь с оглавлением настоящего сборника, уважаемый читатель сможет сделать вывод о том, что даже спустя три столетия со дня рождения Леонарда Эйлера результаты его творчества находят воплощение в науке, образовании и других сферах деятельности современного человека. Поскольку наша действительность характеризуется и отличается от всех предыдущих исторических периодов расширением информатизации общества, проникновением в жизнь новых технологий, различного рода телекоммуникаций и, конечно, Интернета, то без сомнения представляет интерес ответ на вопрос: *А как же имя великого Эйлера отражено в «великой паутине» такой великой страны как Россия, как и где увековечен трехсотлетний юбилей ученого?*

Целью данной статьи является рассмотрение такого источника информации, как Интернет. По результатам поисковых систем, в российском виртуальном информационном пространстве было обнаружено довольно большое количество страниц, где упоминается имя Леонарда Эйлера, например: Yandex — 31 тысяча страниц, Google — 23 тысячи страниц, Yahoo — 44 тысяч страниц, Rambler — 22 тысячи страниц. Какие же наиболее значимы среди этого изобилия?

300-летний юбилей Эйлера очень широко отмечался научной общественностью всего мира в 2007 году, память о выдающемся мыслителе объединила ученых всех континентов. Однако основные торжества проходили в Швейцарии, России и Германии — в странах, с которыми тесно связаны жизнь и творчество Леонарда Эйлера.

В Санкт-Петербурге юбилейные мероприятия проводились на протяжении всего 2007 года, начиная с дня рождения Эйлера 15 апреля. Их организаторами выступали самые разные коллективы: это и Санкт-Петербургский научный центр Российской Академии наук (РАН), Санкт-Петербургский филиал Архива РАН, музеи города, библиотеки, университеты, гимназии, школы, общественные и международные организации, дипломатические службы. Перечень основных мероприятий можно найти на сайте Санкт-Петербургского отделения математического Института имени В. А. Стеклова РАН[1]:

Далеко вперед ушли наука, технологии производства и проектирования машин, приборов и, соответственно, радикально изменилась повседневная жизнь человека со времен, когда творил Эйлер. Но как основной эквивалент ценности всего этого и по сегодняшний день выступают деньги, и поэтому денежные знаки часто хранят изображения, отражающие значимые исторические события. Поэ-



План мероприятий
к 300-летию со дня рождения
Л.Эйлера (1707 - 1783)

- Выпуск маркированного конверта и памятной монеты к 300-летию со дня рождения Л.Эйлера
  Выпуск документального фильма, посвященного жизни и творчеству Л.Эйлера
  Организатор: Фонд поддержки российской математики им. Леонарда Эйлера
- 10.06.2007 Торжественное открытие бюста Л.Эйлера около Международного математического института им.Л.Эйлера
  Организатор: Фонд поддержки российской математики им. Леонарда Эйлера
- 14.05.2007 Возложение цветов на могилу Л.Эйлера в некрополе XVIII в. Александро-Невской лавры
  Торжественное заседание Санкт-Петербургского Научного центра
- 15.05 - 18.05.2007 Международная историко-научная конференция "Л.Эйлер и современная наука"
  Конференцию организуют Санкт-Петербургский научный центр РАН, Институт истории естествознания и техники РАН, Санкт-Петербургский филиал Архива РАН, Санкт-Петербургское математическое общество, Музей М.В.Ломоносова - отдел Музея антропологии и этнографии РАН, Библиотека РАН и ведущие университеты Санкт-Петербурга при содействии Комитета по науке и высшей школе правительства Санкт-Петербурга.
  Предполагается организовать секции истории математики, истории механики и астрономии, истории оптики и физики, истории теории корабля, истории метрологии, истории философии и "Петербургская Академия наук: от истоков к современности".
  В рамках конференции планируется
  - Открытие выставки материалов Санкт-Петербургского филиала Архива Академии наук, посвященной Л.Эйлеру
  - Открытие выставки к 300-летию со дня рождения Л.Эйлера в Библиотеке Российской Академии наук
  - Концерт в память о знаменитом трактате Эйлера о музыке
  - Экскурсия в Музей М.В.Ломоносова для участников конференции
  - Экскурсия в Государственный Эрмитаж

  По всем вопросам следует обращаться по электронному адресу: Euler300@mail.ru
- Май 2007 "Л. Эйлер - наш современник" Симпозиум молодых исследователей - лауреатов премий и стипендий, носящих имя Л.Эйлера
  Организатор: Санкт-Петербургский государственный университет Информационных технологий, механики и оптики
- Июнь-июль 2007 Международный математический конгресс
  Организаторы: Российская академия наук, Санкт-Петербургский научный центр РАН, Санкт-Петербургское отделение Математического института им.В.А.Стеклова РАН, Международный математический институт им.Л.Эйлера, Санкт-Петербургский государственный университет и Фонд Эйлера.
  Конгресс поддержан Правительством Российской Федерации и Администрацией Санкт-Петербурга.
  Организационный комитет конгресса: Л.Д.Фаддеев, Э.А.Тропп, И.А.Ибрагимов, С.В.Кисляков, Г.А.Леонов, Ю.В.Матиясевич, Ю.Д.Бураго, А.М.Вершик, С.В.Востоков, В.А.Гриценко, П.Г.Зограф, Г.А.Серегин, В.Н.Толстых.
  Конгресс включает в себя Эйлеровский Фестиваль (10-12 июня) и серию конференций по различным областям математики, механики и физики, значительный вклад в развитие которых внес Леонард Эйлер, а именно:
  - Л.Эйлер и современная комбинаторика (А.М.Вершик, Zhang Yi) 01.06-07.06, 2007
  - Уравнения Эйлера и смежные проблемы (Г.А.Серегин) 07.06-09.06, 2007
  - Арифметическая геометрия (С.В.Востоков), 13.06-19.06, 2007
  - Геометрическая конференция (Ю.Д.Бураго) 18.06-23.06, 2007
  - Конференция по математическому анализу (Н.К.Никольский, С.В.Кисляков), 25.06-30.06, 2007
  - Модулярные формы и модульные пространства (В.Гриценко, Д.Орлов, П.Зограф), 02.07-07.07, 2007
  - Аналитические методы небесной механики (К.Холшевников, Н.Васильев), 08.07-12.07, 2007
  - Теоретическая и математическая физика (Д.Дьяконов, А.Мирлин) 13.07-18.07, 2007
  - Методы математического моделирования (С.Репин) 24.07-27.07, 2007

  Электронный адрес конгресса: Euler300@imi.ras.ru.

Страница сайта ПОМИ РАН с перечнем мероприятий к 300-летию Л.Эйлера

тому не случайным стало увековечение трехсотлетия выдающегося математика прошлого на российской монете (о чем и свидетельствует информация на сайте Сбербанка России[2]) и маркированном почтовом конверте (о чем говорится в первом пункте мероприятий по празднованию юбилея математика).

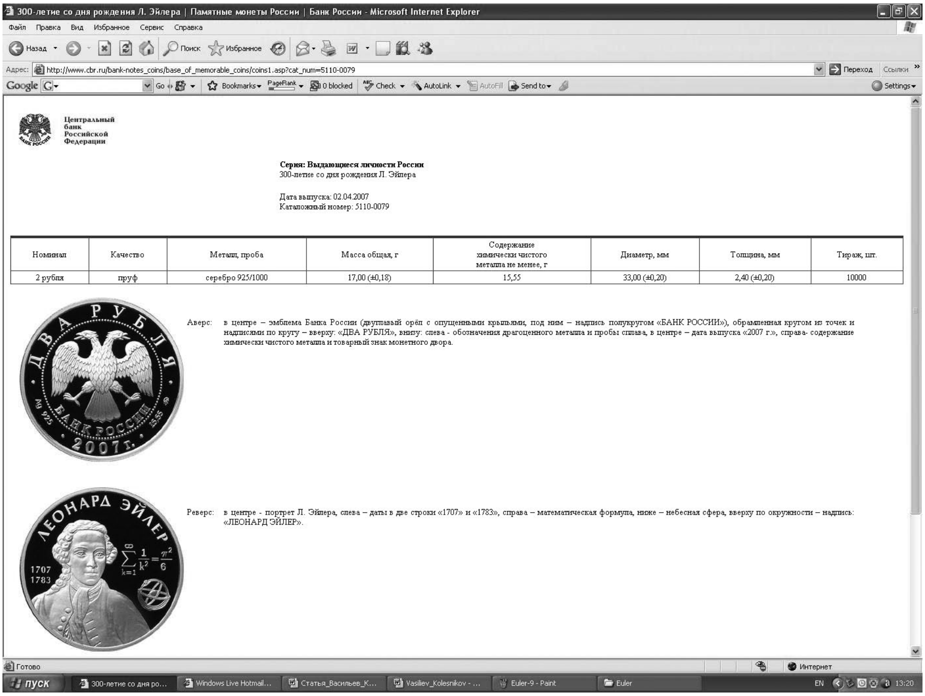
Данная статья посвящена лишь той части информационного пространства Интернета, которая отражает имя великого математика на российских сайтах. Но трудно не упомянуть о юбилейных страницах соотечественников Эйлера[3] и дать примеры из виртуального пространства Германии, где также широко отмечался юбилей ученого.

Так, в ознаменование юбилея Эйлера на сайте Бранденбургской академии размещена страница, посвященная его жизни[4].

Некоторые международные проекты, базирующиеся в России и связанные по тематике с именем и творчеством Эйлера, представляют свою информацию в Интернете на английском языке, что без сомнения делает их доступными пользователям большей части всего ученого мира нашей планеты. Так отражена деятельность Международного математического института Эйлера (Euler International Mathematical Institute)[5], находящегося в Санкт-Петербурге.

Аналогично представлена и вся информация о международном конгрессе Леонарда Эйлера[6], в ходе которого состоялось несколько масштабных мероприятий, среди них — целый ряд конференций по тем направлениям современной математики, которые связаны с творчеством выдающегося ученого.

Результаты ученого и по сей день востребованы в самых современных научных направлениях, появление которых он вряд ли мог предвидеть. Три века



Центральный банк Российской Федерации

Серия: Выдающиеся личности России
300-летие со дня рождения Л. Эйлера

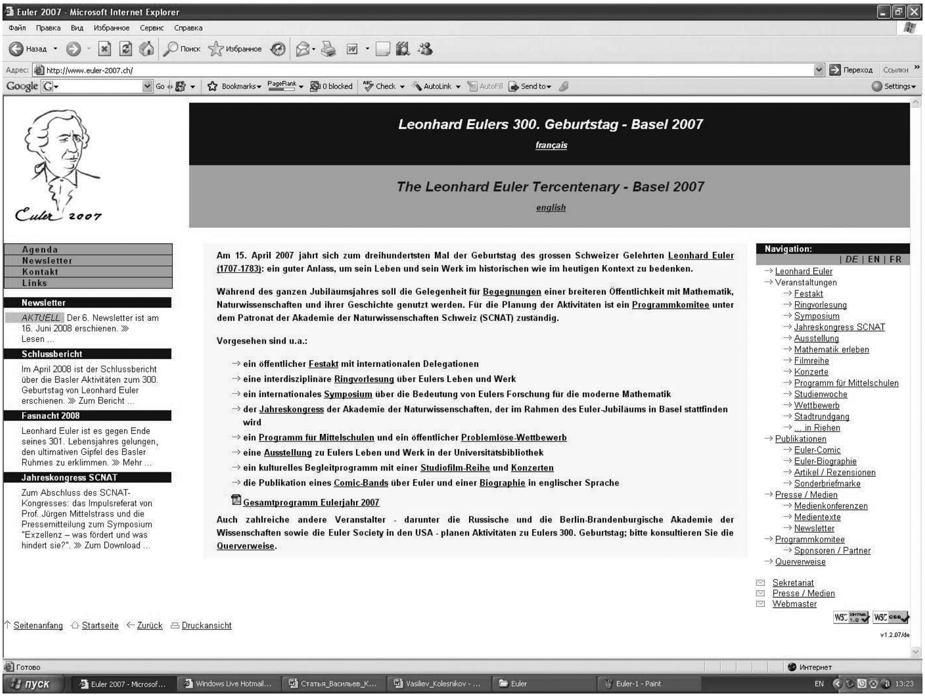
Дата выпуска: 02.04.2007
Каталожный номер: 5110-0079

Номинал	Качество	Металл, проба	Масса общая, г	Содержание химически чистого металла не менее, г	Диаметр, мм	Толщина, мм	Тираж, шт.
2 рубля	пруф	серебро 925/1000	17,00 (±0,18)	15,55	33,00 (±0,20)	2,40 (±0,20)	10000

Аверс: в центре – эмблема Банка России (двуглавый орёл с опущенными крыльями, под ним – надпись полукругом «БАНК РОССИИ»), обрамленная кругом из точек и надписями по кругу – вверху: «ДВА РУБЛЯ», внизу: слева - обозначения драгоценного металла и пробы сплава, в центре – дата выпуска «2007 г.», справа- содержание химически чистого металла и товарный знак монетного двора.

Реверс: в центре - портрет Л. Эйлера, слева – даты в две строки «1707» и «1783», справа – математическая формула, ниже – небесная сфера, вверху по окружности – надпись: «ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР».

Страница сайта Сбербанка России с информацией о юбилейной монете



Leonhard Eulers 300. Geburtstag - Basel 2007

français

The Leonhard Euler Tercentenary - Basel 2007

english

Agenda
Newsletter
Kontakt
Links

Newsletter

AKTUELL Der 6. Newsletter ist am 16. Juni 2008 erschienen. » Lesen ...

Schlussbericht

Im April 2008 ist der Schlussbericht über die Basler Aktivitäten zum 300. Geburtstag von Leonhard Euler erschienen. » Zum Bericht ...

Fasnacht 2008

Leonhard Euler ist es gegen Ende seines 301. Lebensjahres gelungen, den ultimativen Gipfel des Basler Ruhmes zu erklimmen. » Mehr ...

Jahreskongress SCNAT

Zum Abschluss des SCNAT-Kongresses: das Impulsreferat von Prof. Jürgen Mittelstrass und die Pressemitteilung zum Symposium "Exzellenz – was fördert und was hindert sie?". » Zum Download ...

Am 15. April 2007 jährt sich zum dreihundertsten Mal der Geburtstag des grossen Schweizer Gelehrten Leonhard Euler (1707-1783): ein guter Anlass, um sein Leben und sein Werk im historischen wie im heutigen Kontext zu bedenken.

Während des ganzen Jubiläumsjahres soll die Gelegenheit für Begegnungen einer breiteren Öffentlichkeit mit Mathematik, Naturwissenschaften und ihrer Geschichte genutzt werden. Für die Planung der Aktivitäten ist ein Programmkomitee unter dem Patronat der Akademie der Naturwissenschaften Schweiz (SCNAT) zuständig.

Vorgesehen sind u.a.:

- **ein öffentlicher Festakt mit internationalen Delegationen**
- **eine interdisziplinäre Ringvorlesung über Eulers Leben und Werk**
- **ein internationales Symposium über die Bedeutung von Eulers Forschung für die moderne Mathematik**
- **der Jahreskongress der Akademie der Naturwissenschaften, der im Rahmen des Euler-Jubiläums in Basel stattfinden wird**
- **ein Programm für Mittelschulen und ein öffentlicher Problemlöse-Wettbewerb**
- **eine Ausstellung zu Eulers Leben und Werk in der Universitätsbibliothek**
- **ein kulturelles Begleitprogramm mit einer Studiofilm-Reihe und Konzerten**
- **die Publikation eines Comic-Bands über Euler und einer Biographie in englischer Sprache**

Gesamtprogramm Eulerjahr 2007

Auch zahlreiche andere Veranstalter - darunter die Russische und die Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften sowie die Euler Society in den USA - planen Aktivitäten zu Eulers 300. Geburtstag; bitte konsultieren Sie die Querverweise.

Navigation:
| DE | EN | FR

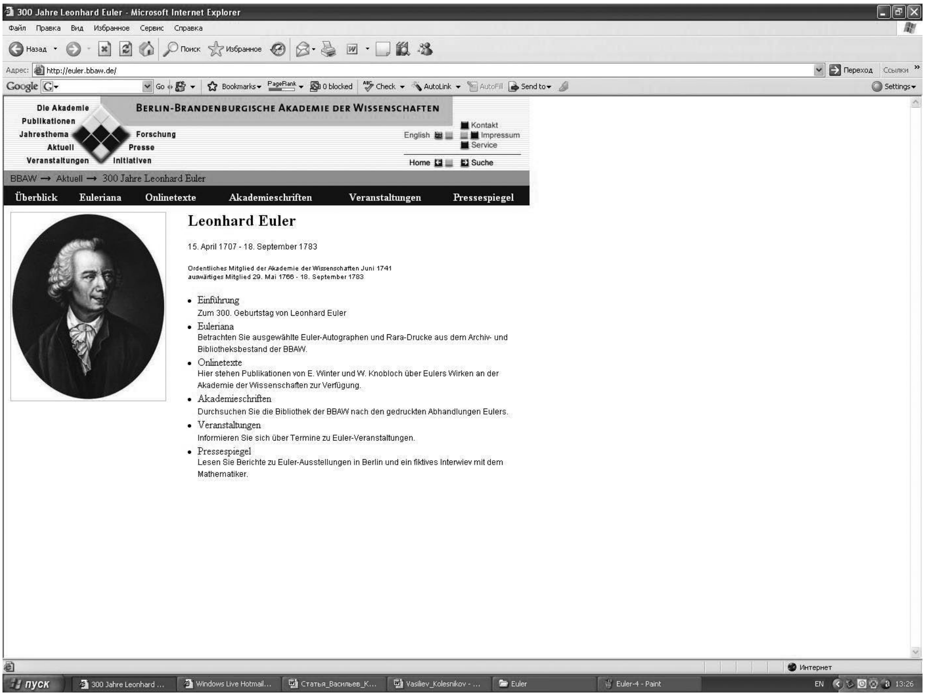
- Leonhard Euler
- Veranstaltungen
  - Festakt
  - Ringvorlesung
  - Symposium
  - Jahreskongress SCNAT
  - Ausstellung
  - Mathematik erleben
  - Filmreihe
  - Konzerte
  - Programm für Mittelschulen
  - Studienwoche
  - Wettbewerb
  - Stadtrundgang
  - ... in Riehen
- Publikationen
  - Euler-Comic
  - Euler-Biographie
  - Artikel / Rezensionen
  - Sonderbriefmarke
- Presse / Medien
  - Medienkonferenzen
  - Medientexte
  - Newsletter
- Programmkomitee
  - Sponsoren / Partner
- Querverweise

Sekretariat
Presse / Medien
Webmaster

Seitenanfang Startseite Zurück Druckansicht

v1.2.07/de

Швейцарский сайт



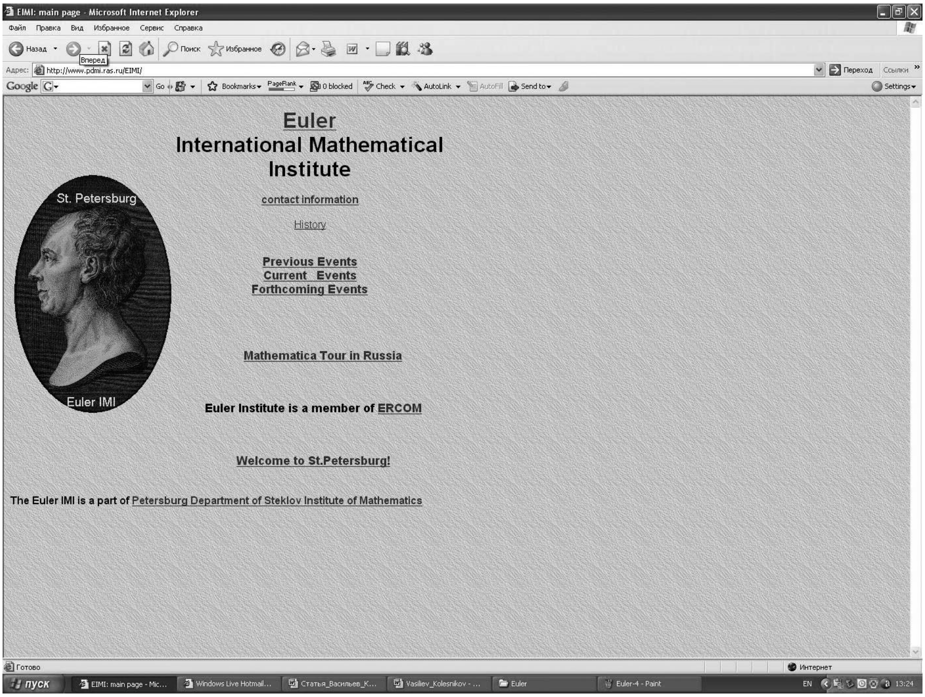
Leonhard Euler

15. April 1707 - 18. September 1783

Ordentliches Mitglied der Akademie der Wissenschaften Juni 1741
auswärtiges Mitglied 29. Mai 1766 - 18. September 1783

- Einführung
  Zum 300. Geburtstag von Leonhard Euler
- Euleriana
  Betrachten Sie ausgewählte Euler-Autographen und Rara-Drucke aus dem Archiv- und Bibliotheksbestand der BBAW.
- Onlinetexte
  Hier stehen Publikationen von E. Winter und W. Knobloch über Eulers Wirken an der Akademie der Wissenschaften zur Verfügung.
- Akademieschriften
  Durchsuchen Sie die Bibliothek der BBAW nach den gedruckten Abhandlungen Eulers.
- Veranstaltungen
  Informieren Sie sich über Termine zu Euler-Veranstaltungen.
- Pressespiegel
  Lesen Sie Berichte zu Euler-Ausstellungen in Berlin und ein fiktives Interwiev mit dem Mathematiker.

Страница сайта Бранденбургской академии наук



Euler
International Mathematical
Institute

contact information

History

Previous Events
Current Events
Forthcoming Events

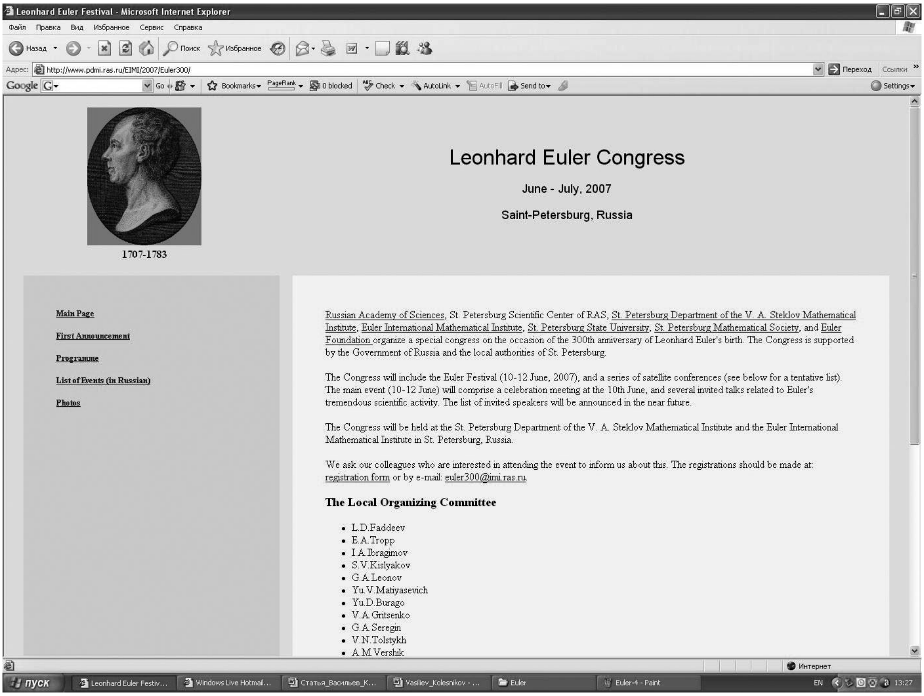
Mathematica Tour in Russia

Euler Institute is a member of ERCOM

Welcome to St.Petersburg!

The Euler IMI is a part of Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

Страница сайта Международного математического института им. Л. Эйлера



Leonhard Euler Congress

June - July, 2007

Saint-Petersburg, Russia

1707-1783

- **Main Page**
- **First Announcement**
- **Programme**
- **List of Events (in Russian)**
- **Photos**

Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Scientific Center of RAS, St. Petersburg Department of the V. A. Steklov Mathematical Institute, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg State University, St. Petersburg Mathematical Society, and Euler Foundation organize a special congress on the occasion of the 300th anniversary of Leonhard Euler's birth. The Congress is supported by the Government of Russia and the local authorities of St. Petersburg.

The Congress will include the Euler Festival (10-12 June, 2007), and a series of satellite conferences (see below for a tentative list). The main event (10-12 June) will comprise a celebration meeting at the 10th June, and several invited talks related to Euler's tremendous scientific activity. The list of invited speakers will be announced in the near future.

The Congress will be held at the St. Petersburg Department of the V. A. Steklov Mathematical Institute and the Euler International Mathematical Institute in St. Petersburg, Russia.

We ask our colleagues who are interested in attending the event to inform us about this. The registrations should be made at: registration form or by e-mail: euler300@imi.ras.ru.

The Local Organizing Committee

- L.D.Faddeev
- E.A.Tropp
- I.A.Ibragimov
- S.V.Kislyakov
- G.A.Leonov
- Yu.V.Matiyasevich
- Yu.D.Burago
- V.A.Gritsenko
- G.A.Seregin
- V.N.Tolstykh
- A.M.Vershik

Страница с информацией о Международном математическом конгрессе

спустя некоторые из них используются программистами в работе над новыми продуктами для Интернет-технологий, компьютерных игр и т. п. Об этом, например, повествует сайт GameDev.ru, где авторы статьи о кватернионах в программировании игр описывают используемый многими программистами способ представления вращения объектов с привлечением матриц вращения или углов Эйлера[7].

Леонард Эйлер был величайшим ученым по уровню и разносторонности талантов, его можно сравнить разве что с его тезкой — Леонардо да Винчи. Леонард Эйлер входит в первую пятерку величайших математиков всех времен и народов, чье творчество стало достоянием всего человечества. До сих пор школьники всех стран изучают тригонометрию и логарифмы в том виде, какой придал им Эйлер. Студенты проходят высшую математику по руководствам, первыми образцами которых явились классические монографии Эйлера. Он, прежде всего, был математиком, неоценимо велика роль Эйлера в создании классических образцов учебной литературы и в стимулировании творчества многих поколений математиков. «Читайте, читайте Эйлера, он наш общий учитель», — говорил своим ученикам Лаплас.

Здесь уместно отметить, что кроме значительного вклада Л. Эйлера в развитие и формирование математики как науки, Интернет-ресурсы дают большое число ссылок на его труды по оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки.

Значение наследия Л. Эйлера для информационных технологий и для высшего образования в целом как нельзя лучше демонстрируется примером

Кватернионы в программировании игр.

Страницы: *1* *2* *Следующая страница*

Автор: **wat**

Существует несколько путей представления вращения объектов. Многие программисты используют для этого матрицы вращения или углы Эйлера. Каждое из этих решений работает замечательно, до тех пор, пока вы не пытаетесь осуществить гладкую интерполяцию между двумя разными положениями объекта. Например, представьте себе объект, который просто свободно вращается в пространстве. Если хранить вращение, как матрицу или в виде углов Эйлера, то гладкая интерполяция окажется довольно дорогостоящей по вычислениям и будет не столь гладкой, как при интерполяции кватернионами. Хотя и можно попытаться наиболее близко расставить временные ключи на стадии создания анимации, однако это влечет за собой хранение большего количества данных для данного вращения и не совсем тривиально ясно, какой выбирать шаг. Понятно, что и в этом случае без интерполяции не обойтись, никогда не известно какой FPS будет у игрока.

Многие игры от третьего лица используют кватернионы для анимации движения камеры. Все игры от третьего лица располагают камеру на некотором расстоянии от персонажа. Так как камера имеет другое движение, отличающееся от движения персонажа, например, при повороте персонажа - камера движется по дуге, то иногда бывает, что это движение выглядит не натурально, скачками. Это одна из проблем, которую можно решить при помощи кватернионов. Кватернионы также удобно использовать в лётных симуляторах, таких как ИЛ-2 Штурмовик. Вместо манипулирования тремя углами (roll, pitch и yaw), представляя вращение вокруг осей x, y и z соответственно, намного проще использовать один кватернион. Да и вообще много игр и приложений трёхмерной графики сохраняют ориентацию объектов в кватернионах. Например, легче добавить угловую скорость к кватерниону, чем к матрице.

Что это такое
Основные операции и свойства кватернионов
Преобразования
  Вращение вокруг оси
  Преобразование сферических координат в кватернион
  Углы Эйлера
  Преобразования матрицы поворота в кватернион
  Преобразование единичного кватерниона в матрицу поворота
  Гладкая интерполяция
Кватернионы в DirectX
Кватернионы в MAX SDK
Ссылки по теме

Что это такое

Кватернионы были введены Гамильтоном в XVIII веке. Кватернионы являются 4-х мерным расширением множества комплексных чисел, другими словами — это гиперкомплексные числа. То есть кватернион q задаётся четвёркой чисел (x,y,z,w):

$w + xi + yj + zk$
, где $i^2 = j^2 = z^2 = -1$.

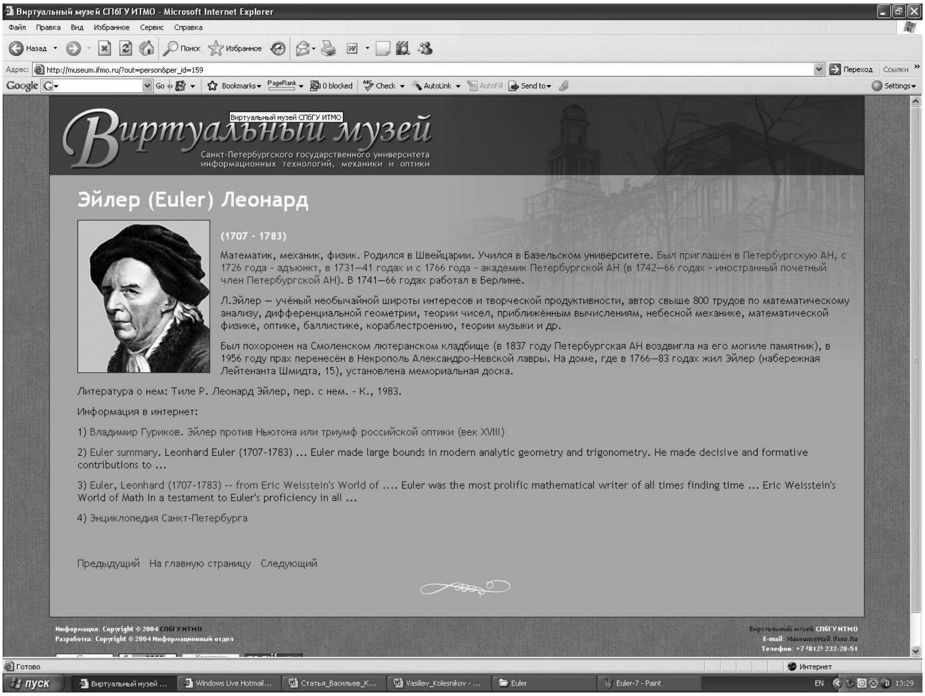
Страница сайта GameDev.ru

сайта лидера в образовании в области информационных технологий — Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики[8] и его виртуального музея[9].

В экспозиции Виртуального музея университета ИТМО реализован специальный раздел «Исторические персоналии», в котором представлены биографии и информация о более чем трехста ученых, педагогах и специалистах, внесших значительный вклад в развитие оптики, точной механики и информационных технологий. Среди ученых, внесших существенный вклад в развитие оптики, — не только российской оптики XVIII века, но и мировой оптики — особое место занимает имя Леонарда Эйлера. В Виртуальном музее среди других источников информации даны ссылки на статьи по истории оптики.

Университет ИТМО также стал одним из организаторов международной научной конференции «Л. Эйлер и современная наука», о чем свидетельствует страница на сайте Санкт-Петербургского филиала Института истории естествознания и техники РАН[10].

В «паутине» нашли отражение самые разные грани деятельности великого ученого и периоды его жизни. Наиболее интересна для российского пользователя Интернета информация об его пребывании в Санкт-Петербурге, куда он приехал восемнадцатилетним юношей по приглашению, которое выхлопотали для него братья Даниил и Николай Бернулли. Императорская Академия наук предоставила молодому ученому большие возможности для реализации его талантов. Круг его интересов был необычайно широк, с юношеским энтузиазмом он брался за выполнение самых разнообразных работ. Его деятельность не



Эйлер (Euler) Леонард

(1707 - 1783)

Математик, механик, физик. Родился в Швейцарии. Учился в Базельском университете. Был приглашён в Петербургскую АН, с 1726 года - адъюнкт, в 1731—41 годах и с 1766 года - академик Петербургской АН (в 1742—66 годах - иностранный почетный член Петербургской АН). В 1741—66 годах работал в Берлине.

Л.Эйлер — учёный необычайной широты интересов и творческой продуктивности, автор свыше 800 трудов по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др.

Был похоронен на Смоленском лютеранском кладбище (в 1837 году Петербургская АН воздвигла на его могиле памятник), в 1956 году прах перенесён в Некрополь Александро-Невской лавры. На доме, где в 1766—83 годах жил Эйлер (набережная Лейтенанта Шмидта, 15), установлена мемориальная доска.

Литература о нем: Тиле Р. Леонард Эйлер, пер. с нем. - К., 1983.

Информация в интернет:

1) Владимир Гуриков. Эйлер против Ньютона или триумф российской оптики (век XVIII)

2) Euler summary. Leonhard Euler (1707-1783) ... Euler made large bounds in modern analytic geometry and trigonometry. He made decisive and formative contributions to ...

3) Euler, Leonhard (1707-1783) -- from Eric Weisstein's World of .... Euler was the most prolific mathematical writer of all times finding time ... Eric Weisstein's World of Math in a testament to Euler's proficiency in all ...

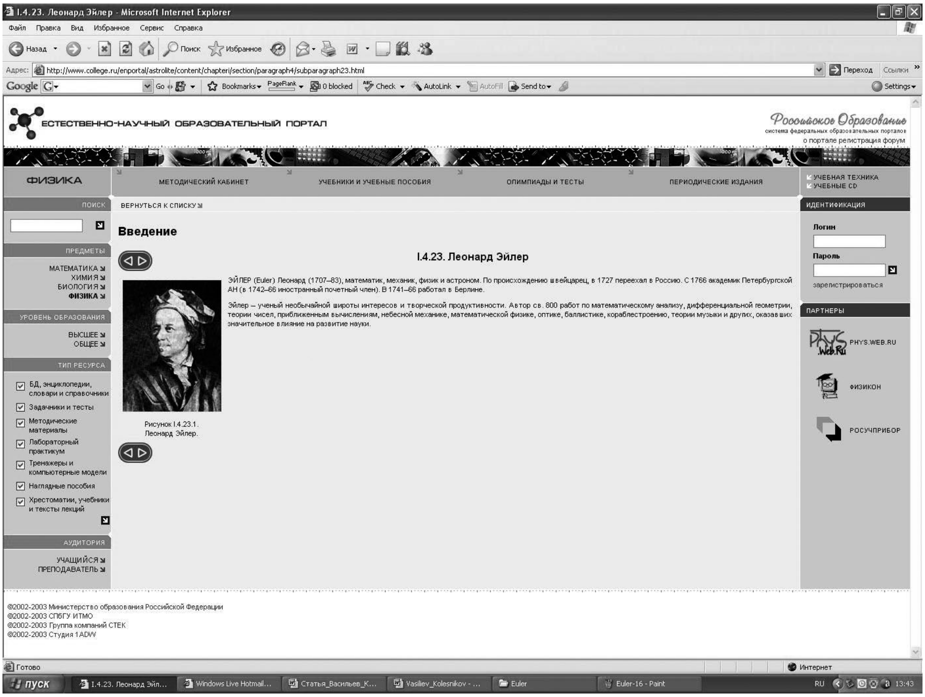
4) Энциклопедия Санкт-Петербурга

Предыдущий На главную страницу Следующий

Информация: Copyright © 2004 СПбГУ ИТМО
Разработка: Copyright © 2004 Информационный отдел

Виртуальный музей СПбГУ ИТМО
E-mail: Museum@Mail.ifmo.Ru
Телефон: +7 (812) 232-28-51

Персональная Страница Л. Эйлера на сайте Виртуального музея СПбГУ ИТМО



Введение

I.4.23. Леонард Эйлер

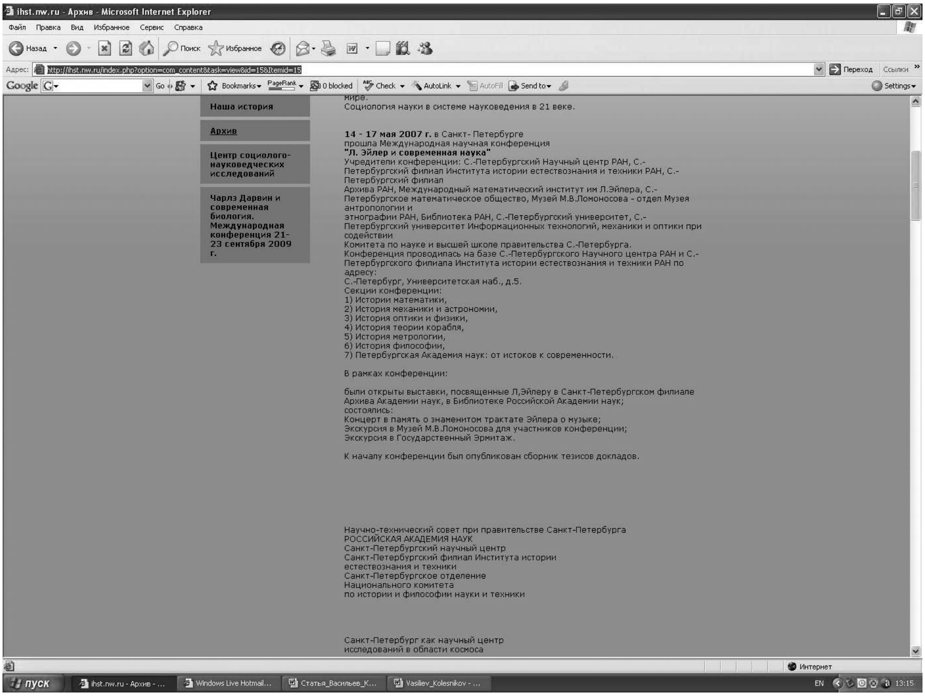
ЭЙЛЕР (Euler) Леонард (1707–83), математик, механик, физик и астроном. По происхождению швейцарец, в 1727 переехал в Россию. С 1766 академик Петербургской АН (в 1742–66 иностранный почетный член). В 1741–66 работал в Берлине.

Эйлер – ученый необычайной широты интересов и творческой продуктивности. Автор св. 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и других, оказавших значительное влияние на развитие науки.

Рисунок I.4.23.1. Леонард Эйлер.

©2002-2003 Министерство образования Российской Федерации
©2002-2003 СПбГУ ИТМО
©2002-2003 Группа компаний СТЕК
©2002-2003 Студия 1ADW

Естественно-научный образовательный портал



мире.
Социология науки в системе науковедения в 21 веке.

14 - 17 мая 2007 г. в Санкт- Петербурге
прошла Международная научная конференция
"Л. Эйлер и современная наука"
Учредители конференции: С.-Петербургский Научный центр РАН, С.-Петербургский филиал Института истории естествознания и техники РАН, С.-Петербургский филиал
Архива РАН, Международный математический институт им Л.Эйлера, С.-Петербургское математическое общество, Музей М.В.Ломоносова - отдел Музея антропологии и
этнографии РАН, Библиотека РАН, С.-Петербургский университет, С.-Петербургский университет Информационных технологий, механики и оптики при содействии
Комитета по науке и высшей школе правительства С.-Петербурга.
Конференция проводилась на базе С.-Петербургского Научного центра РАН и С.-Петербургского филиала Института истории естествознания и техники РАН по адресу:
С.-Петербург, Университетская наб., д.5.
Секции конференции:
1) Истории математики,
2) История механики и астрономии,
3) История оптики и физики,
4) История теории корабля,
5) История метрологии,
6) История философии,
7) Петербургская Академия наук: от истоков к современности.

В рамках конференции:

были открыты выставки, посвященные Л,Эйлеру в Санкт-Петербургском филиале Архива Академии наук, в Библиотеке Российской Академии наук;
состоялись:
Концерт в память о знаменитом трактате Эйлера о музыке;
Экскурсия в Музей М.В.Ломоносова для участников конференции;
Экскурсия в Государственный Эрмитаж.

К началу конференции был опубликован сборник тезисов докладов.

Научно-технический совет при правительстве Санкт-Петербурга
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Санкт-Петербургский научный центр
Санкт-Петербургский филиал Института истории
естествознания и техники
Санкт-Петербургское отделение
Национального комитета
по истории и философии науки и техники

Санкт-Петербург как научный центр
исследований в области космоса

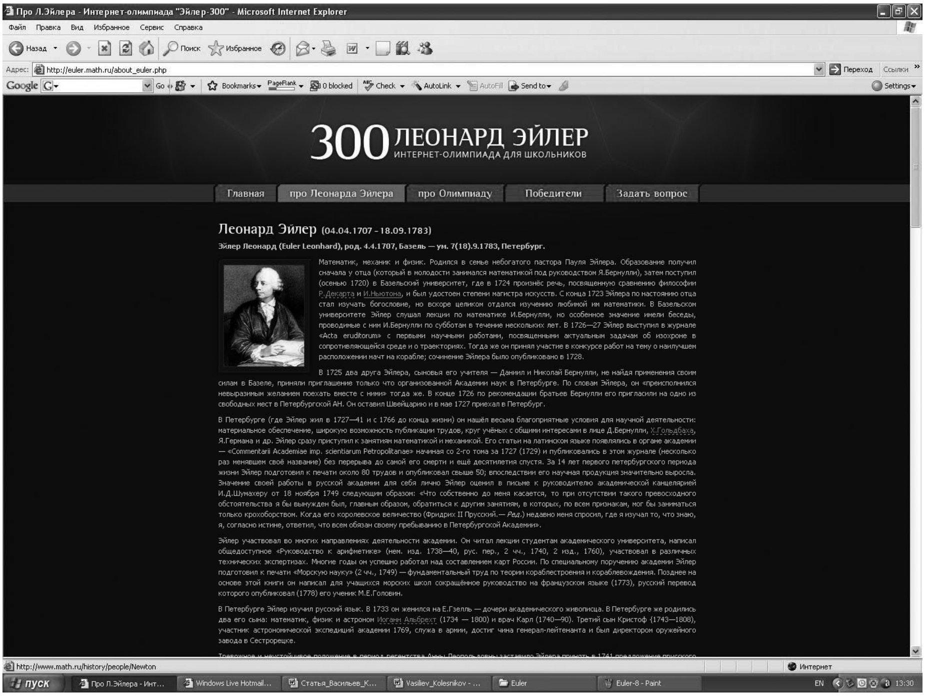
Страница сайта СПбФ ИИЕТ РАН с информацией
о Международной научной конференции «Л. Эйлер и современная наука»

исчерпывалась исследованиями в области математики и механики. Он решил сложную задачу создания максимально точных карт Российской империи, занимался испытаниями и расчетами приборов и конструкций (например, произвел расчеты, подтверждающие надежность конструкции одноарочного моста И. Кулибина), его не оставляли равнодушным вопросы восприятия музыки и светомузыка, он живо интересовался основами кораблестроения, баллистикой, метрологией и т. п.

«Обитатели» Интернета выражают свое восхищение талантом ученого ярко и эмоционально. Возможно, не все представленные ими материалы безукоризненны с историко-научной точки зрения, их суждения подчас наивны и исполнены юношеского максимализма, но университетские[11] и студенческие сайты показывают, насколько близок Эйлер современной студенческой молодежи, близок как ученый и как личность.

Наряду с высшей школой, интерес к имени Эйлера проявляют и организации, связанные с деятельностью учебных заведений других уровней. Так, в апреле 2007 года Московский центр непрерывного математического образования при поддержке, в частности, Математического института им В. А. Стеклова РАН, сайтов math.ru и etudes.ru, а также Московского института открытого образования провел Интернет-олимпиаду для школьников 8–11 классов, посвященную 300-летию со дня рождения Леонарда Эйлера.

Для привлечения внимания участников олимпиады к личности Эйлера на сайте олимпиады представлен историко-научный материал, который важен для



Леонард Эйлер (04.04.1707 - 18.09.1783)

Эйлер Леонард (Euler Leonhard), род. 4.4.1707, Базель — ум. 7(18).9.1783, Петербург.

Математик, механик и физик. Родился в семье небогатого пастора Пауля Эйлера. Образование получил сначала у отца (который в молодости занимался математикой под руководством Я.Бернулли), затем поступил (осенью 1720) в Базельский университет, где в 1724 произнёс речь, посвященную сравнению философии Р.Декарта и И.Ньютона, и был удостоен степени магистра искусств. С конца 1723 Эйлера по настоянию отца стал изучать богословие, но вскоре целиком отдался изучению любимой им математики. В Базельском университете Эйлер слушал лекции по математике И.Бернулли, но особенное значение имели беседы, проводимые с ним И.Бернулли по субботам в течение нескольких лет. В 1726—27 Эйлер выступил в журнале «Acta eruditorum» с первыми научными работами, посвященными актуальным задачам об изохроне в сопротивляющейся среде и о траекториях. Тогда же он принял участие в конкурсе работ на тему о наилучшем расположении мачт на корабле; сочинение Эйлера было опубликовано в 1728.

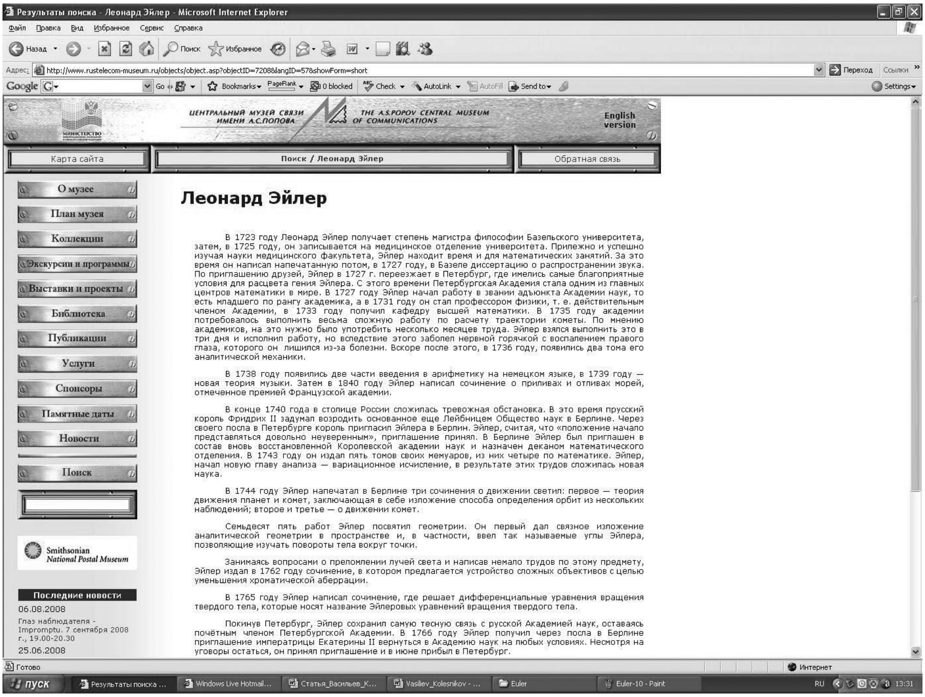
В 1725 два друга Эйлера, сыновья его учителя — Даниил и Николай Бернулли, не найдя применения своим силам в Базеле, приняли приглашение только что организованной Академии наук в Петербурге. По словам Эйлера, он «преисполнился невыразимым желанием поехать вместе с ними» тогда же. В конце 1726 по рекомендации братьев Бернулли его пригласили на одно из свободных мест в Петербургской АН. Он оставил Швейцарию и в мае 1727 приехал в Петербург.

В Петербурге (где Эйлер жил в 1727—41 и с 1766 до конца жизни) он нашёл весьма благоприятные условия для научной деятельности: материальное обеспечение, широкую возможность публикации трудов, круг учёных с общими интересами в лице Д.Бернулли, Х.Гольдбаха, Я.Германа и др. Эйлер сразу приступил к занятиям математикой и механикой. Его статьи на латинском языке появлялись в органе академии — «Commentarii Academiae imp. scientiarum Petropolitanae» начиная со 2-го тома за 1727 (1729) и публиковались в этом журнале (несколько раз менявшем своё название) без перерыва до самой его смерти и ещё десятилетия спустя. За 14 лет первого петербургского периода жизни Эйлер подготовил к печати около 80 трудов и опубликовал свыше 50; впоследствии его научная продукция значительно выросла. Значение своей работы в русской академии для себя лично Эйлер оценил в письме к руководителю академической канцелярией И.Д.Шумахеру от 18 ноября 1749 следующим образом: «Что собственно до меня касается, то при отсутствии такого превосходного обстоятельства я бы вынужден был, главным образом, обратиться к другим занятиям, в которых, по всем признакам, мог бы заниматься только крохоборством. Когда его королевское величество (Фридрих II Прусский.— *Ред.*) недавно меня спросил, где я изучал то, что знаю, я, согласно истине, ответил, что всем обязан своему пребыванию в Петербургской Академии».

Эйлер участвовал во многих направлениях деятельности академии. Он читал лекции студентам академического университета, написал общедоступное «Руководство к арифметике» (нем. изд. 1738—40, рус. пер., 2 чч., 1740, 2 изд., 1760), участвовал в различных технических экспертизах. Многие годы он успешно работал над составлением карт России. По специальному поручению академии Эйлер подготовил к печати «Морскую науку» (2 чч., 1749) — фундаментальный труд по теории кораблестроения и кораблевождения. Позднее на основе этой книги он написал для учащихся морских школ сокращённое руководство на французском языке (1773), русский перевод которого опубликовал (1778) его ученик М.Е.Головин.

В Петербурге Эйлер изучил русский язык. В 1733 он женился на Е.Гзелль — дочери академического живописца. В Петербурге же родились два его сына: математик, физик и астроном Иоганн Альбрехт (1734 — 1800) и врач Карл (1740—90). Третий сын Кристоф {1743—1808), участник астрономической экспедиций академии 1769, служа в армии, достиг чина генерал-лейтенанта и был директором оружейного завода в Сестрорецке.

Страница сайта Интернет-олимпиады, посвященной 300-летию со дня рождения Леонарда Эйлера



Леонард Эйлер

В 1723 году Леонард Эйлер получает степень магистра философии Базельского университета, затем, в 1725 году, он записывается на медицинское отделение университета. Прилежно и успешно изучая науки медицинского факультета, Эйлер находит время и для математических занятий. За это время он написал напечатанную потом, в 1727 году, в Базеле диссертацию о распространении звука. По приглашению друзей, Эйлер в 1727 г. переезжает в Петербург, где имелись самые благоприятные условия для расцвета гения Эйлера. С этого времени Петербургская Академия стала одним из главных центров математики в мире. В 1727 году Эйлер начал работу в звании адъюнкта Академии наук, то есть младшего по рангу академика, а в 1731 году он стал профессором физики, т. е. действительным членом Академии, в 1733 году получил кафедру высшей математики. В 1735 году академии потребовалось выполнить весьма сложную работу по расчету траектории кометы. По мнению академиков, на это нужно было употребить несколько месяцев труда. Эйлер взялся выполнить это в три дня и исполнил работу, но вследствие этого заболел нервной горячкой с воспалением правого глаза, которого он лишился из-за болезни. Вскоре после этого, в 1736 году, появились два тома его аналитической механики.

В 1738 году появились две части введения в арифметику на немецком языке, в 1739 году — новая теория музыки. Затем в 1840 году Эйлер написал сочинение о приливах и отливах морей, отмеченное премией Французской академии.

В конце 1740 года в столице России сложилась тревожная обстановка. В это время прусский король Фридрих II задумал возродить основанное еще Лейбницем Общество наук в Берлине. Через своего посла в Петербурге король пригласил Эйлера в Берлин. Эйлер, считая, что «положение начало представляться довольно неуверенным», приглашение принял. В Берлине Эйлер был приглашен в состав вновь восстановленной Королевской академии наук и назначен деканом математического отделения. В 1743 году он издал пять томов своих мемуаров, из них четыре по математике. Эйлер, начал новую главу анализа — вариационное исчисление, в результате этих трудов сложилась новая наука.

В 1744 году Эйлер напечатал в Берлине три сочинения о движении светил: первое — теория движения планет и комет, заключающая в себе изложение способа определения орбит из нескольких наблюдений; второе и третье — о движении комет.

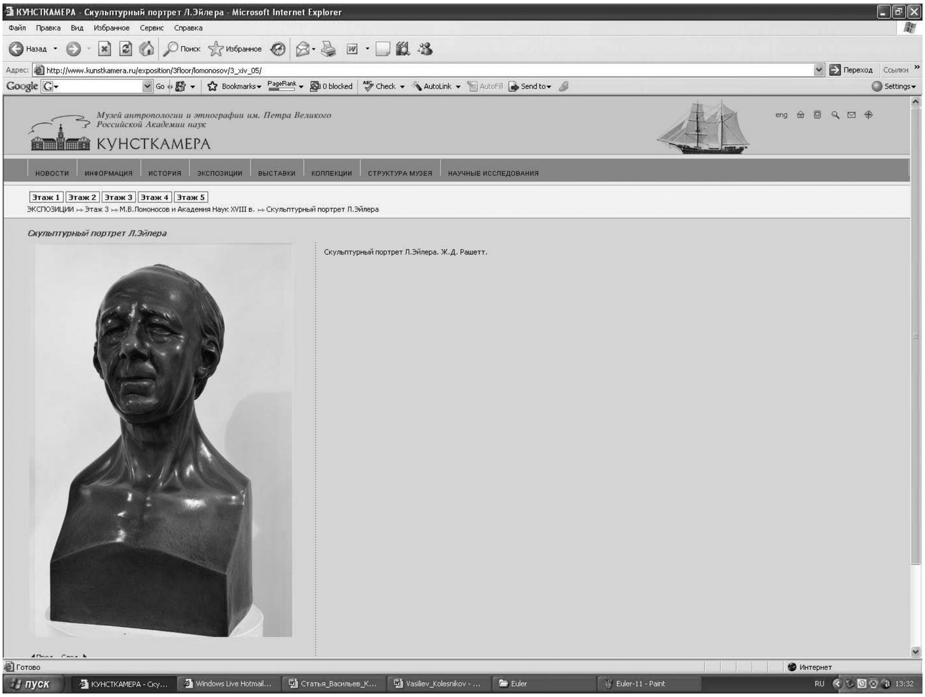
Семьдесят пять работ Эйлер посвятил геометрии. Он первый дал связное изложение аналитической геометрии в пространстве и, в частности, ввел так называемые углы Эйлера, позволяющие изучать повороты тела вокруг точки.

Занимаясь вопросами о преломлении лучей света и написав немало трудов по этому предмету, Эйлер издал в 1762 году сочинение, в котором предлагается устройство сложных объективов с целью уменьшения хроматической аберрации.

В 1765 году Эйлер написал сочинение, где решает дифференциальные уравнения вращения твердого тела, которые носят название Эйлеровых уравнений вращения твердого тела.

Покинув Петербург, Эйлер сохранил самую тесную связь с русской Академией наук, оставаясь почётным членом Петербургской Академии. В 1766 году Эйлер получил через посла в Берлине приглашение императрицы Екатерины II вернуться в Академию наук на любых условиях. Несмотря на уговоры остаться, он принял приглашение и в июне прибыл в Петербург.

Страница сайта Центрального музея связи им. А. С. Попова



Скульптурный портрет Л.Эйлера

Скульптурный портрет Л.Эйлера. Ж.Д. Рашетт.

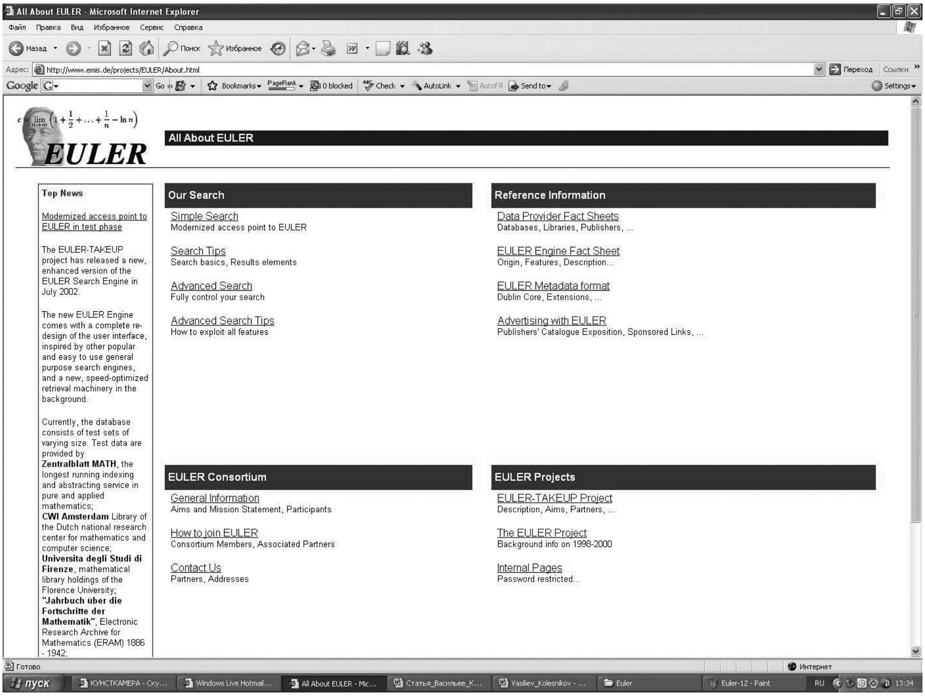
Страница сайта МАЭ РАН

понимания значения Эйлера как математика и его роли в становлении отечественной математической школы. Эйлера нередко характеризуют как гениального «вычислителя». Действительно, он был непревзойденным мастером формальных выкладок и преобразований, в его трудах многие математические формулы и символика впервые получают современный вид[12].

Не могли забыть имя Эйлера и сайты российских музеев, здесь можно найти не только интересные факты из жизни ученого, но и обратиться по ссылкам к тем экспонатам, которые находятся в реальном музее и олицетворяют воплощение достижений современной отечественной науки, немалый вклад в которую внес и Леонард Эйлер. Именно об этом мы узнаем со страниц, посвященных математику, на сайте Центрального музея связи имени А. С. Попова[13].

Здесь мы читаем о Санкт-Петербургском периоде жизни Эйлера. На сайте Кунсткамеры[14] и страничке отдела МАиЭ РАН — Музея М. В. Ломоносова[15] можно найти изображение скульптурного портрета Л. Эйлера (автор Ж. Д. Рашет), а также фото Кунсткамеры, обсерватории XVIII в., которая находится в башне, где в свое время работал Эйлер, и зал заседаний Академии наук XVIII в. М. В. Ломоносов многим обязан Л. Эйлеру –именно Эйлер дал положительный отзыв на работу Ломоносова, благодаря чему он был принят в Императорскую Академию наук и стал первым русским академиком.

Масштабный проект по обеспечению пользователям со всего мира Интернет-доступа к математическим публикациям назван именем Эйлера[16]. Причем название проекта одновременно является и аббревиатурой (EULER — European Libraries and Electronic Resources in Mathematical Sciences).



$c = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$

EULER

All About EULER

Top News

Modernized access point to EULER in test phase

The EULER-TAKEUP project has released a new, enhanced version of the EULER Search Engine in July 2002.

The new EULER Engine comes with a complete re-design of the user interface, inspired by other popular and easy to use general purpose search engines, and a new, speed-optimized retrieval machinery in the background.

Currently, the database consists of test sets of varying size. Test data are provided by **Zentralblatt MATH**, the longest running indexing and abstracting service in pure and applied mathematics; **CWI Amsterdam** Library of the Dutch national research center for mathematics and computer science; **Universita degli Studi di Firenze**, mathematical library holdings of the Florence University; **"Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik"**, Electronic Research Archive for Mathematics (ERAM) 1886 - 1942;

Our Search

Simple Search
Modernized access point to EULER

Search Tips
Search basics, Results elements

Advanced Search
Fully control your search

Advanced Search Tips
How to exploit all features

Reference Information

Data Provider Fact Sheets
Databases, Libraries, Publishers, ...

EULER Engine Fact Sheet
Origin, Features, Description...

EULER Metadata format
Dublin Core, Extensions, ...

Advertising with EULER
Publishers' Catalogue Exposition, Sponsored Links, ...

EULER Consortium

General Information
Aims and Mission Statement, Participants

How to join EULER
Consortium Members, Associated Partners

Contact Us
Partners, Addresses

EULER Projects

EULER-TAKEUP Project
Description, Aims, Partners, ...

The EULER Project
Background info on 1998-2000

Internal Pages
Password restricted...

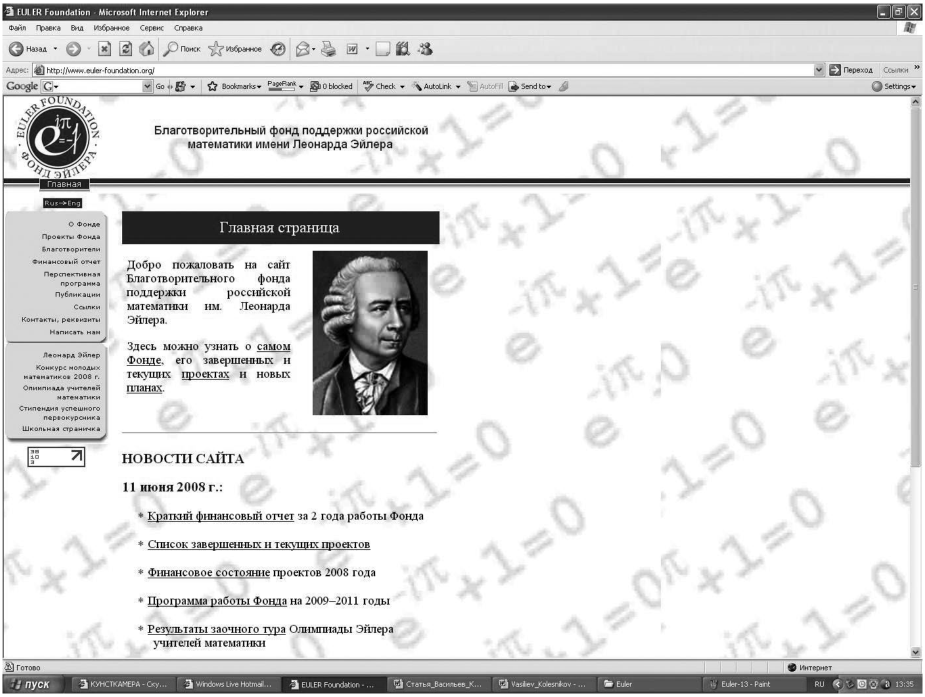
Страница электронной библиотеки сайта EULER

Проект EULER начал реализовываться в апреле 1998 г. и является инициативой Европейского математического общества[17], которое объединяет пользователей математических библиотек по всей Европе; членами общества являются почти все национальные ассоциации математиков (в том числе из Центральной и Восточной Европы) и более 3000 физических лиц. Научной координацией работы этой электронной библиотеки занимается Математический факультет Берлинского университета[18], который также стоит у истоков проекта EULER.

Данный проект разрабатывается группой библиотек и информационных центров в рамках программы European Commission in the Telematics for Libraries sector[19] при финансовой поддержке Европейского Союза. Создана универсальная точка доступа к математическим интернет-ресурсам в виде совмещения всех релевантных ресурсов по теме (библиографических и полнотекстовых баз данных, электронных каталогов библиотек, электронных научных журналов, электронных версий препринтов, указателей сетевых ресурсов, причем и платных и бесплатных) в одном месте, т. е. в специализированном математическом портале.

Все ресурсы проекта совместимы в эксплуатации, единый пользовательский интерфейс помогает пользователю в проведении удобного поиска необходимых источников среди самых разнообразных материалов. Основными пользователями проекта являются читатели библиотек — участников консорциума, специализирующиеся в математических науках и работающие в науке, промышленности или образовании.

Для всех участвующих в проекте крупных библиотек и информационных центров предусмотрен равный доступ к ресурсам, но с адаптацией к местным



Благотворительный фонд поддержки российской математики имени Леонарда Эйлера

Главная страница

Добро пожаловать на сайт Благотворительного фонда поддержки российской математики им. Леонарда Эйлера.

Здесь можно узнать о самом Фонде, его завершенных и текущих проектах и новых планах.

НОВОСТИ САЙТА

11 июня 2008 г.:

* Краткий финансовый отчет за 2 года работы Фонда

* Список завершенных и текущих проектов

* Финансовое состояние проектов 2008 года

* Программа работы Фонда на 2009–2011 годы

* Результаты заочного тура Олимпиады Эйлера учителей математики

Страница сайта Благотворительного фонда Леонарда Эйлера

условиям. Для открытого и широкого использования имеется ограниченный демонстрационный доступ. Общее наблюдение за качеством обслуживания осуществляет соответствующий комитет Европейского математического общества.

Информационные массивы по проекту EULER в настоящее время поставляются основными его участниками — библиотеками и информационными центрами Европы. Координатор проекта — Центр специальной информации (FIZ) в Карлсруэ[20], который, совместно с Европейским математическим обществом и Академией наук Гейдельберга, уже много лет ведет международную систему реферирования и составления обзоров по математике Zentralblatt MATH[21]. Другими «отцами-основателями» являются:

Одна из пяти крупнейших библиотек Германии, Государственная библиотека земли Нижняя Саксония[22];

Голландская библиотека CWI[23].

Одна из крупнейших научных библиотек Италии, Библиотека Флорентийского университета[24];

Специалисты по электронным библиотекам и сетевой информации из Лундской библиотеки[25];

Национальный французский центр по координации и совместному пользованию ресурсами публикаций по математике[26].

На сегодня действуют уже 42 сервера — точки доступа к проекту EULER[27], физически расположенные в 21 стране мира, в том числе 3 из них находятся в России[28].

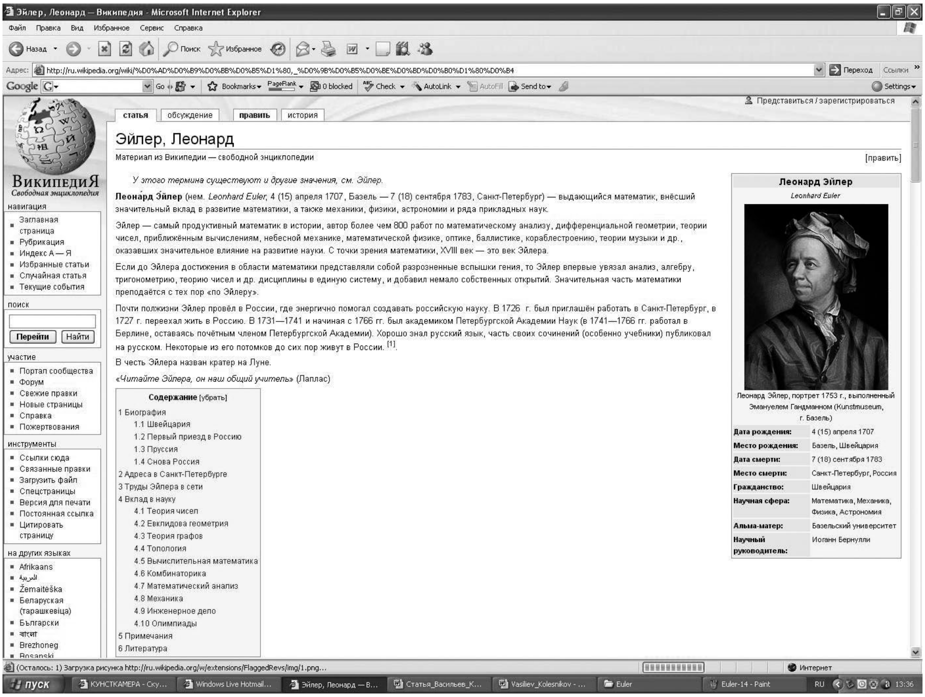
Во время подготовки к празднованию 300-летия со дня рождения великого ученого был создан фонд поддержки российских математиков — фонд Эйлера, который принял активное участие в юбилейных мероприятиях. Фонд ведет многообразную работу в области поддержки математики и математического образования[29].

Поскольку для человека XXI века Интернет стал и библиотекой и читальным залом, газетным киоском и аудиторией конференций, то неудивительно, что биографические данные Л. Эйлера мы находим на огромном множестве страниц информационных сайтов: энциклопедий, словарей, библиотек и подобных им. Ниже мы приводим лишь главные страницы самых значимых сайтов из этого перечня. На страницах этих сайтов-энциклопедий можно найти много интересной и познавательной информации о научном мире. Узнать самые последние новости науки и техники, ознакомиться с биографиями известных и малоизвестных ученых, которые внесли огромный вклад в развитие науки. Из данных биографий можно узнать, как жили и творили выдающиеся умы нашей цивилизации, как происходило становление и развитие науки за весь период истории, с какими трудностями приходилось сталкиваться ученым на пути к прогрессу, и как различны их судьбы. Так, почти все из них посвятили страницу Леонарду Эйлеру, ниже мы приводим перечень этих ресурсов и несколько иллюстраций из них:

— Википедия[30]
— Большая советская энциклопедия[31];
— Естественнонаучный образовательный портал[32];
— Большая Советская Энциклопедия[33];
— Энциклопедия кинематографа[34];
— Информационный портал «Excelion!»[35];
— Энциклопедия «Кругосвет»[36];
— Биография.ру[37];
— Русский Биографический Словарь (этот ресурс вводит свое написание имени Эйлера, называя его Леонгард)[38];
— Портал «Русская цивилизация»[39];
— Словопедия[40];
— Он-лайн математическая энциклопедия algebraic.ru[41];
— Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона[42];
— Энциклопедический словарь[43];
— Россия в Красках[44].

В статье этого сборника «“Opera Omnia” Леонарда Эйлера: Проект века» Андреаса Кляйнерта и Мартина Маттмюллера упоминается о том, что в рамках совместного проекта Санкт-Петербургского филиала Архива РАН и Архива Л. Эйлера в Базеле в настоящее время Эйлеровский комитет работает над проектом представить в Интернете часть эпистолярного наследия математика в электронной базе данных в виде сканированных рукописей. Когда поставленная задача будет выполнена, тогда и мы сможем показать читателю, как с помощью виртуального пространства становятся доступны труды ученого, работавшего более трех веков тому назад.

Вывод из данной работы напрашивается сам собой: бессмертные творения великого ученого и его имя входят в нашу новую жизнь, в мир информационных технологий совершено естественно, как если бы Леонард Эйлер был нашим современником.



Эйлер, Леонард

Материал из Википедии — свободной энциклопедии [править]

У этого термина существуют и другие значения, см. Эйлер.

Леона́рд Э́йлер (нем. *Leonhard Euler*, 4 (15) апреля 1707, Базель — 7 (18) сентября 1783, Санкт-Петербург) — выдающийся математик, внёсший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук.

Эйлер — самый продуктивный математик в истории, автор более чем 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др., оказавших значительное влияние на развитие науки. С точки зрения математики, XVIII век — это век Эйлера.

Если до Эйлера достижения в области математики представляли собой разрозненные вспышки гения, то Эйлер впервые увязал анализ, алгебру, тригонометрию, теорию чисел и др. дисциплины в единую систему, и добавил немало собственных открытий. Значительная часть математики преподаётся с тех пор «по Эйлеру».

Почти полжизни Эйлер провёл в России, где энергично помогал создавать российскую науку. В 1726 г. был приглашён работать в Санкт-Петербург, в 1727 г. переехал жить в Россию. В 1731—1741 и начиная с 1766 гг. был академиком Петербургской Академии Наук (в 1741—1766 гг. работал в Берлине, оставаясь почётным членом Петербургской Академии). Хорошо знал русский язык, часть своих сочинений (особенно учебники) публиковал на русском. Некоторые из его потомков до сих пор живут в России. [1].

В честь Эйлера назван кратер на Луне.

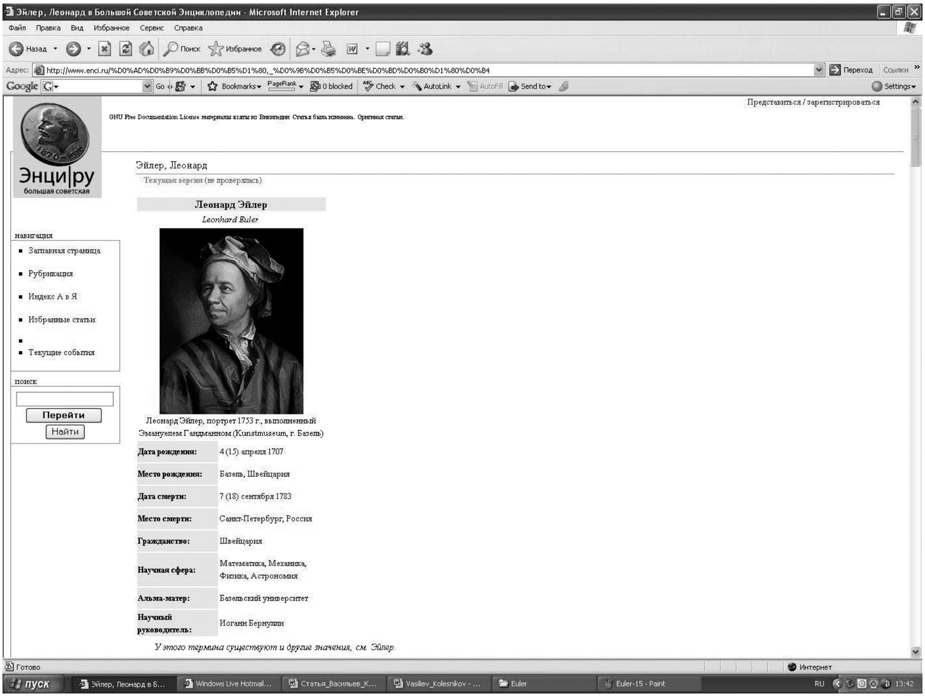
«*Читайте Эйлера, он наш общий учитель*» (Лаплас)

Леонард Эйлер

Leonhard Euler

Леонард Эйлер, портрет 1753 г., выполненный Эмануелем Гандманном (Kunstmuseum, г. Базель)

Дата рождения:	4 (15) апреля 1707
Место рождения:	Базель, Швейцария
Дата смерти:	7 (18) сентября 1783
Место смерти:	Санкт-Петербург, Россия
Гражданство:	Швейцария
Научная сфера:	Математика, Механика, Физика, Астрономия
Альма-матер:	Базельский университет
Научный руководитель:	Иоганн Бернулли



GNU Free Documentation License материалы взяты из Википедии Статья была изменена. Оригинал статьи.

Эйлер, Леонард

Текущая версия (не проверялась)

Леонард Эйлер

Leonhard Euler

Леонард Эйлер, портрет 1753 г., выполненный Эмануелем Гандманном (Kunstmuseum, г. Базель)

Дата рождения:	4 (15) апреля 1707
Место рождения:	Базель, Швейцария
Дата смерти:	7 (18) сентября 1783
Место смерти:	Санкт-Петербург, Россия
Гражданство:	Швейцария
Научная сфера:	Математика, Механика, Физика, Астрономия
Альма-матер:	Базельский университет
Научный руководитель:	Иоганн Бернулли

У этого термина существуют и другие значения, см. Эйлер.

Страницы, посвященные Л. Эйлеру, в интернет-энциклопедиях

Примечания:

1. http://www.pdmi.ras.ru
2. http://www.cbr.ru
3. http://www.euler-2007.ch
4. http://euler.bbaw.de
5. http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/
6. http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2007/Euler300/
7. http://www.gamedev.ru
8. http://www.ifmo.ru
9. http://museum.ifmo.ru
10. http://ihst.nw.ru
11. http://www.univer.omsk.ru
12. http://euler.math.ru
13. http://www.rustelecom-museum.ru
14. http://www.kunstkamera.ru
15. http://www.museum.ru/M221
16. http://www.emis.de/projects/EULER/
17. http:// www.emis.de
18. http://www.math.tu-berlin.de
19. http://www.cordis.lu/libraries
20. http://www.zblmath.fiz-karlsruhe.de
21. http://www.emis.de/ZMATH
22. http://www.sub.uni-goettingen.de
23. http://www.cwi.nl
24. http://www.unifi.it/universita/biblioteche/i_biblio.htm
25. http://www.lub.lu.se/netlab
26. http://www-mathdoc.ujf-grenoble.fr
27. http://www.kv.by/index2002500601.htm
28. http://www.ras.ru/EMIS/projects/EULER
29. http://www.euler-foundation.org
30. http://ru.wikipedia.org
31. http://www.enci.ru
32. http://www.en.edu.ru
33. http://bse.sci-lib.com
34. http://www.rudata.ru
35. http://articles.excelion.ru
36. http://www.krugosvet.ru
37. http://www.biografia.ru
38. http://www.rulex.ru
39. http://www.rustrana.ru
40. http://www.slovopedia.com
41. http://www.algebraic.ru
42. http://dict.tsk.ru/d-encyclopaedical/b/Q66T1EEGNF8BBKC0.html
43. http://psbatishev.narod.ru/enc/03641.htm
44. http://ricolor.org/history/eng/tochn/eyler/

Л. И. Брылевская
Санкт-Петербург, Россия

О праздновании юбилея Леонарда Эйлера

Abstract: The article is devoted to Leonhard Euler's 300$^{\text{th}}$ anniversary celebration in St. Petersburg and Basel.

В 2007 году научная общественность всего мира отметила 300-летие со дня рождения выдающегося ученого, одного из гениальнейших мыслителей мира Леонарда Эйлера (1707–1783), оставившего заметный след в самых разных областях знания: в математической физике и теории музыки, в метрологии и теории корабля, в картографии и оптике, в механике и астрономии и др. Основные торжества проходили в странах, с которыми была связана жизнь и научная деятельность ученого, — в Швейцарии, России и Германии, однако юбилей Леонарда Эйлера стал воистину международным событием: научные конференции, выставки, специальные курсы лекций в университетах, торжественные заседания Академий и научных обществ прошли по всему миру. И кажется странным, что 2007 год не был провозглашен ЮНЕСКО годом Эйлера, тому виной нерасторопность математического сообщества, не сумевшего вовремя объединиться для подачи заявки.

В 2007 году мы отмечали двойной юбилей — 300-летие со дня рождения и 280-летие со дня приезда юного Эйлера в Санкт-Петербург. Мы не претендуем на полноту описания мероприятий этого года, потому что число самых разнообразных событий в память великого ученого столь велико, что перечисление невозможно, даже когда речь идет только о России. Мы остановимся лишь на некоторых мероприятиях, проходивших в Санкт-Петербурге и на родине Л. Эйлера — в Базеле.

В соответствии с распоряжением Правительства Российской Федерации о праздновании трехсотлетия со дня рождения Леонарда Эйлера от 16 сентября 2006 года, в Санкт-Петербурге был запланирован ряд мероприятий, посвященных этому юбилею. Можно сказать, что в нашем городе год Эйлера начался 15 апреля, в день рождения ученого. И начался он с возложения цветов на могилу Леонарда Эйлера на Лазаревском кладбище Александро-Невской лавры (Некрополь XVIII века Музея городской скульптуры).

15 апреля является днем памяти двух выдающихся академиков Императорской Академии наук — Л. Эйлера и М. В. Ломоносова (даты жизни Ломоносова 8(19).11.1711–4(15).04.1765). Эйлер был похоронен на Смоленском лютеранском кладбище. В 1957 году, накануне празднования 250-летия со дня рождения ученого, его могила была перенесена в Александро-Невскую лавру. Теперь два выдающихся ученых, так и не встретившихся при жизни, покоятся рядом. Каждый год 15 апреля почитатели Михаила Ломоносова и Леонарда Эйлера встречаются в Александро-Невской лавре. Памятная дата 2007 года не стала исключением, на Лазаревское кладбище пришли представители Академии наук, Эйлеровской и Ломоносовской комиссий АН, потомки Эйлера, представители общественных организаций, средств массовой информации и жители города.

На следующий день состоялось посвященное юбилею торжественное заседание Санкт-Петербургского профессорского собрания, проходившее в Санкт-Петербургском университете водных коммуникаций.

Юбилейные мероприятия в Швейцарии начались 17 марта открытием выставки «Леонард Эйлер и упоение наукой» в библиотеке Базельского университета. Именно так четырнадцатилетний мальчик, будущий гениальный ученый, сформулировал свою цель: «Испытать упоение наукой». Посетители выставки могли увидеть уникальные материалы, относящиеся к истории Базельского университета, повествующие о детских годах Леонарда и раннем периоде его творчества, а также познакомиться с историей рода Эйлеров. Выставка была подготовлена сотрудниками Архива Эйлера, который долгие годы занимается изданием полного собрания сочинений Л. Эйлера, а также сотрудниками издательства Бернулли, библиотек Базельского и Цюрихского университетов.

Официальное празднование юбилея в Базеле состоялось 20 апреля в кирхе св. Мартина, где 17 апреля 1707 года Леонард Эйлер был крещен. На тожественном собрании выступали представители правительства Швейцарской республики, руководство кантона Базель, деятели науки и культуры Швейцарии, потомки Л. Эйлера, представители Российской и Берлинской Академии наук, дипломаты, журналисты. С приветствием от РАН выступил директор Петербургско-

А. А. Эйлер возле церкви,
в которой служил Пауль Эйлер (Базель)

Участники конференции «Л. Эйлер и современная наука» у могилы Л. Эйлера. Ж.-П. Пир (Люксембург) произносит речь в честь великого ученого

го отделения Института математики им. В. А. Стеклова член-корреспондент РАН С. В. Кисляков. Кульминационным моментом торжеств стало исполнение цюрихским камерным оркестром «Collegium Novum» произведения Бетины Скжипчак, посвященного трактату Эйлера о движении Луны 1772 года. Это сочинение было написано специально к юбилею Эйлера и исполнялось впервые. Среди участников торжеств было много потомков и родственников Л. Эйлера, среди которых два прямых потомка Л. Эйлера в седьмом поколении: один из них, Александр Александрович Эйлер, — житель Базеля, бывший член парламента Швейцарии; другой — Дмитрий Александрович Эйлер, житель Санкт-Петербурга, врач-педиатр.

К трехсотлетию со дня рождения Л. Эйлера Почтовая служба Швейцарии выпустила юбилейную марку и конверт, в день рождения Эйлера проводилось специальное гашение марки. Кроме того, в издательстве Birkhäuser вышел в свет перевод на английский язык книги «Leonhard Euler» Эмиля Фельмана, известного исследователя научного творчества ученого, создателя Эйлеровского архива в Базеле. Поскольку имя выдающегося ученого не так часто привлекает внимание средств массовой информации и становится все менее известным даже в Швейцарии, организаторы торжеств пошли на эксперимент — выпустили биографию ученого в виде комиксов, чтобы познакомить с жизнью великого соотечественника швейцарскую молодежь.

В России юбилей Эйлера был отмечен выпуском маркированного конверта и серебряной юбилейной монеты. В июне на Математическом конгрессе было проведено гашение марки на конверте специальным штемпелем. При поддержке Благотворительного фонда поддержки российской математики им. Л. Эйлера режиссером И. А. Шадханом был снят фильм «Об Эйлере». Документальные ленты, посвященные жизни и творчеству Л. Эйлера, были сняты в Швейцарии (на средства преподавателей Лозаннской политехнической школы) и в Германии, Бранденбургской Академией наук.

Следуя традиции Императорской Академии наук отмечать знаменательные даты Академии торжественными заседаниями, 14 мая 2007 года в Санкт-Петербургском научном центре состоялось Открытое торжественное заседание Президиума Санкт-Петербургского научного центра РАН, на которое были приглашены представители Правительства Санкт-Петербурга, консульств Швейцарии и Германии, представители общественных организаций.

В тот же день открылась Международная научная конференция «Леонард Эйлер и современная наука», организованная на базе Санкт-Петербургского научного центра РАН. Цель конференции – изучение как научного наследия академика Императорской Академии наук Леонарда Эйлера, так и социокультурного и научно-организационного аспекта деятельности ученого, отдавшего более полувека Императорской Академии наук и способствовавшего укреплению позиций Академии как в России, так и за рубежом. При этом обсуждение не ограничивалось рамками научного творчества одного ученого, основные тенденции

Выступление академика Ж. И. Алферова на Открытом торжественном заседании президиума Санкт-Петербургского Научного центра РАН

Участники юбилейных торжеств: *(слева направо)* генеральный консул Швейцарии в Санкт-Петербурге У. Штраузак, президент Эйлеровской комиссии проф. Х. Крафт (Базель), исследователь базельского периода жизни Л. Эйлера д-р Ф. Нагель (Базель), сотрудник посольства Швейцарии в Москве А. А. Мельников

и проблемы развития отечественной науки рассматривались в более широком социальном, культурном и временном контекстах.

Учредителями конференции были Санкт-Петербургский научный центр РАН, Санкт-Петербургский филиал Архива РАН, Санкт-Петербургский филиал Института истории естествознания и техники РАН, Музей М. В. Ломоносова — отдел МАЭ РАН, Санкт-Петербургское математическое общество, Библиотека Академии наук, Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, при содействии Комитета по науке и высшей школе правительства Санкт-Петербурга. Оргкомитет юбилейных мероприятий возглавил вице-президент РАН, председатель Санкт-Петербургского научного центра нобелевский лауреат академик Ж. И. Алферов. В конференции приняли участие исследователи из России, Швейцарии, Германии, Франции, Украины, Беларуси, США, Люксембурга, Сербии, Израиля, Польши. Общее число участников — около четырехсот человек. Была организована работа семи секций, посвященных различным аспектам деятельности Л. Эйлера.

Участники юбилейных торжеств с большим интересом познакомились с выставкой материалов Санкт-Петербургского филиала Архива РАН «Ваш Леонгард Эулер», выставкой редких изданий трудов Эйлера в Библиотеке РАН. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН организовал экскурсии по академическим местам Васильевского острова, Музей М. В. Ломоносова — отдел МАЭ РАН подготовил экскурсии, посвященные истории Академии наук XVIII века, Государственный Эрмитаж познакомил с научно-технической коллекцией музея.

Наиболее активное участие в подготовке и проведении юбилейных мероприятий и конференции «Л. Эйлер и современная наука» приняла швейцарская сторона, прежде всего консульство Швейцарской республики, генеральный консул господин У. Штраузак, Швейцарский центр в Петербурге (Международный центр научного и культурного сотрудничества «Helenika»). При поддержке швейцарской стороны впервые был опубликован перевод на русский язык знаменитого трактата Л. Эйлера «Опыт новой теории музыки», который изначально был издан в Санкт-Петербурге на латыни в 1739 году. Презентация этой книги прошла в день открытия конференции. При поддержке швейцарского центра в Санкт-Петербурге российский оркестр старинной музыки «Musica Antiqua» под управлением Владимира Шуляковского дал концерт, посвященный трудам Эйлера по теории музыки.

Крупным международным событием юбилейных торжеств стал Математический конгресс, подготовленный и проведенный Международным математическим институтом им. Л. Эйлера и Санкт-Петербургским отделением Математического института им. В. А. Стеклова РАН. Организационный комитет возглавил академик-секретарь Отделения математики РАН, лауреат Государственной премии России, директор Международного математического института им. Л. Эйлера академик Л. Д. Фаддеев. Торжественные заседания Эйлеровского конгресса проходили с 10 по 12 июня, и, кроме того, на протяжении двух месяцев (июнь – июль) были проведены 10 сателлитных конференций, относящихся к самым разнообразным областям математики, что отражает широту научных интересов

Выступление оркестра старинной музыки
«Musica Antiqua» под управлением В. Шуляковского

Леонарда Эйлера. Это современная комбинаторика, гидродинамика, математический анализ, геометрия, аналитические методы небесной механики, теоретическая и математическая физика и математическое моделирование. В конференциях приняли участие ведущие специалисты из разных стран мира.

На Математическом конгрессе были подведены итоги Первого Эйлеровского конкурса, проводившегося Фондом Эйлера и Санкт-Петербургским Математическим обществом. Сопредседатели жюри конкурса президент Санкт-Петербургского Математического общества А. М. Вершик, директор Благотворительного фонда поддержки российской математики им. Л. Эйлера С. В. Востоков и директор Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН С. В. Кисляков объявили лауреатов трех премий по разделам: «Студенты», «Аспиранты» и «Молодые ученые». Награждение победителей состоялось в Санкт-Петербургском научном центре РАН 10 июня.

Петербургские математики выступили с инициативой увековечивания памяти Леонарда Эйлера в топонимике города. На средства благотворительного фонда поддержки российской математики в сквере у Международного математического института имени Л. Эйлера был установлен бюст ученого.

Активными участниками юбилейных мероприятий были вузы Санкт-Петербурга. В целом ряде университетов прошли студенческие и аспирантские конференции, назовем лишь наиболее крупные из них. Санкт-Петербургский университет информационных технологий, механики и оптики провел Симпозиум молодых исследователей — лауреатов премий и стипендий, носящих имя Леонарда Эйлера. Эта конференция молодых исследователей была организована совместно с университетом Ильменау (Германия) и является результатом многолетнего сотрудничества двух университетов по стипендиям имени Леонарда Эйлера. Большая студенческая историко-научная конференция была организована в Санкт-Петербургском электротехническом университете трудами Т. К. Виноградовой.

Празднование юбилея Эйлера привлекло внимание общественности и средств массовой информации не только к славным страницам истории, но и к общим для всего мира проблемам образования и организации научных исследований (особенно физико-математического направления). На различных этапах исторического развития в тех или иных странах возникают схожие проблемы, и человечеством накоплен значительный опыт их решения. Скольких проблем можно было бы избежать, если бы люди, облеченные властью, учитывали этот опыт в своей деятельности. Многочисленные конференции и семинары показали, насколько полезны и актуальны для нынешнего времени суждения великого ученого, касающиеся вопросов организации науки, постановки математического образования, методики преподавания математики и механики. Идейное наследие Леонарда Эйлера удивительно современно, оно сочетает в себе поразительную простоту и глубину, и мы уверены, что оно не утратит своей актуальности и впредь. Не случайно доклады многих участников торжеств были посвящены не только славному прошлому, но, прежде всего, будущему науки и перспективам математического образования.

Ханспетер Крафт
Базель, Швейцария

Каково было бы быть Эйлером?

(речь на торжественном заседании, посвященном юбилею Леонарда Эйлера, состоявшемся в Базеле 25 апреля 2007 года)

Представим себе, что сейчас 2060 год. Этот год особый для города Базеля, потому что 600 лет назад, 4 апреля 1460 года, состоялось официальное открытие Базельского университета. Базельцы гордятся своим университетом, поэтому годовщина отмечается с должной торжественностью.

И тут приходит сенсационное сообщение: «Гипотеза Римана доказана Леонардом П. Эйлером», сообщает на первой полосе газета «Нью-Йорк Таймс». Мы узнаем, что швейцарский математик, профессор IAS (Institute for Advanced Study — *Прим. перев.*) в Принстоне, обладатель медали Филдса и премии Абеля, почетный доктор Базельского университета Леонард П. Эйлер, родившийся в Базеле в 2007 году, доказал знаменитую гипотезу Римана. Речь идет о гипотезе распределения нулей так называемой дзета-функции, которая была выдвинута Бернхардом Риманом в 1860 году, то есть 200 лет назад, и над которой многие известные математики безуспешно ломали головы.

Сообщение об этом эпохальном научном событии с быстрой молнии распространилось во всей мировой прессе. Следующее интервью было опубликовано во вчерашнем номере журнала «*Weltwoche*».

Корреспондент (К): Господин профессор Эйлер, какое значение Ваше колоссальное достижение в области теории чисел имеет для науки в целом?

Э.: Для большинства ученых математика является важным инструментом, который позволяет «обсчитывать» их модели и, тем самым, делать количественные оценки. Постоянно растущее значение этого инструмента неоспоримо, так же как и постоянно растущие требования его пользователей.

Но в Вашем вопросе слышится сомнение: можно ли найти какое-либо применение найденному мною доказательству? Или, может быть, было бы намного лучше, если бы математика сконцентрировалась на «производстве инструментов», то есть на возможностях ее применения в других науках, на прикладных аспектах, вместо того чтобы заниматься собственными теоретическими исследованиями, польза от которых совершенно не очевидна?

В первую очередь, обращает на себя внимание то обстоятельство, что этот вопрос о практической применимости результатов исследований обращен, главным образом, к чистым математикам. А почему не к теологам, историкам искусства, философам или египтологам? Не связано ли это с убежденностью многих людей в том, что можно прекрасно прожить и без математических знаний, а от культуры и образования отказаться совершенно невозможно? Разве математика является только вспомогательной дисциплиной, которую в скором будущем заменят компьютеры? Разве математика не является культурным достижением человечества? Разве она не имеет образовательного значения?

Безусловно, имеет смысл досконально разобраться в этом вопросе.

К.: Господин Эйлер, почему же чистая математика столь важна для прикладных целей?

Э.: Многие из современных математических инструментов очень сложны, поэтому выдвигаемые пользователями требования связаны с двумя условиями: хорошее знание проблем пользователя, с одной стороны, и глубокое понимание теоретических основ, на которых базируется этот математический инструментарий, с другой стороны. Ведь часто оказывается, что применение математического инструмента в предлагаемой форме совершено невозможно. И тогда мы должны снова обращаться к теории, чтобы понять, почему этот инструмент не работает, в чем кроются истинные проблемы и не следует ли искать совершенно иные подходы. Именно это и составляет предмет фундаментальных исследований в математике!

Кроме того, во все времена математические инструменты находили применение за пределами тех областей, для которых они были разработаны. Вспомним, например, теорию игр, нашедшую применение в экономической теории, а с недавнего времени и в психологии, или теорию графов с ее применением в системах навигации и при решении распределительных задач.

Можно привести также множество примеров таких результатов теоретических исследований, которые нашли применение спустя многие годы, причем применение неожиданное и незапланированное. К самым известным из них относятся преобразование Радона, составившее основу для развития компьютерной томографии, элементарная теория чисел и изучение больших простых чисел, без которых современная цифровая коммуникация была бы просто невозможна, или теория симметрических групп, которая лежит в основе как физики элементарных частиц, так и кристаллографии.

К.: Господин Эйлер, многие люди имеют весьма расплывчатые представления о том, чем занимаются физики, астрономы или историки. Но практически никто не может вообразить себе, что в математике вообще что-то можно исследовать.

Э.: Несколько лет назад мне довелось быть членом одной международной комиссии, которая должна была подготовить доклад об исследованиях в области. В качестве «наблюдателя» в работе комиссии принимал участие один очень известный химик из Гарвардского университета. С самого начала он поставил перед нами, математиками, вопрос: «В чем состоит цель ваших исследований?». Мы озадаченно и довольно беспомощно посмотрели друг на друга. Я попытался спасти положение, задав встречный вопрос: «А что является Вашей целью?». Ответ последовал незамедлительно: «Мы хотим объяснить жизнь!». Этому заявлению мы не могли ничего противопоставить! Но еще раз стало очевидно, что математика не относится к естественным наукам. Но и гуманитарной наукой она тоже не является!

К.: Да, господин Эйлер, но что же такое математика? Что она изучает?

Э.: Сильно упрощая, можно сказать, вероятно, следующее. Многие науки создают специальные математические модели для описания и, при возможности, расчета изучаемых ими явлений. Математика изучает сами эти модели с целью их выработки и для достижения понимания их основных свойств и, тем самым, более широкой применимости.

Я приведу Вам два примера. Первый — гидродинамика, описывающая поведение жидкостей. Основополагающие дифференциальные уравнения были выведены еще в XVIII веке, но в то время их численное решение было возможно только для очень простых случаев. С тех пор математики разработали методы, позволяющие решать очень сложные задачи и даже моделировать их. При этом современные мощные компьютеры и результаты исследований в таких областях, как математический анализ, программное управление и применение вычислительной техники для научных расчетов играют главную роль. Но особенно важно то, что эти новые методы можно успешно применять и для других систем дифференциальных уравнений, даже тех, которые никак не связаны с гидродинамикой.

В качестве второго примера я хотел бы назвать квантовую механику. Когда физик объясняет вам, что это такое, и рассказывает о распределении вероятностей и принципах неопределенности, то Вы погружаетесь в благоговейное изумление и не можете понять, как с помощью таких смутных понятий вообще можно что-то вычислить. Ведь физик не сказал, что за всем этим стоит очень точная и четко сформулированная математическая модель, а именно теория волновых функций, разработанная Шрёдингером. Для математиков она является в настоящее время частной областью функционального анализа и теории операторов, которые, в свою очередь, тоже получили разнообразное применение за пределами квантовой механики. Поэтому новые знания, полученные в области этих теорий, имеют широкомасштабное значение.

К.: Господин профессор Эйлер, Вы хотите тем самым сказать, что математики — и мы нередко слышим это — «не такие как все»?

Э.: Существует важное отличие, потому что математические положения со временем не теряют своей значимости, справедливости и не устаревают. Чисто внешне это проявляется уже в том, что в математических библиотеках специализированные журналы хранятся с первого номера, который иной раз относится к XIX веку.

Такая окончательность, неизменность математического доказательства создает известный контраст с неопределенностью любого естественнонаучного знания, но никоим образом не означает стагнации. Сегодня мы лучше понимаем полученные в прошлом результаты, например, как часть всеобъемлющей теории, как частный случай более широкого результата. Но исходные принципиальные идеи и рассуждения могут даже спустя 100 лет и в совершенно ином аспекте привести к новым знаниям, и тому имеется множество подтверждений. Можно с уверенностью утверждать, что в известной формуле полиэдров, выведенной в XVIII веке, заложена принципиальная идея алгебраической топологии, которая относится к важнейшим областям научных исследований современности.

К.: Господин Эйлер, математики всегда с восторгом говорят об элегантных доказательствах, потрясающих результатах и красивых теоремах. То есть математика является произведением искусства, а математики — художниками?

Э.: Я считаю, что движущей силой любой научной работы является любознательность. Наградой за нее служит восхищение сделанным открытием и восторг, испытываемый при достижении всё лучшего понимания полученного результата. Это присуще всем ученым.

Человеку, который никогда не испытывал таких эмоций, вероятно, трудно понять их. Людям, далеким от науки, проще представить себе энтузиазм и воодушевление биологов и медиков — их науки занимаются постижением тайны жизни. Правда, этот романтический образ несколько поколеблен тем обстоятельством, что сейчас многие биологи большую часть своих исследований проводят, сидя перед экраном компьютера. И уж совершенно невозможно постичь восторг математика, который возбужденно мечется по комнате, рисует непонятные знаки на доске и мечтает о достижении принципиально новых результатов, о красивых доказательствах и оригинальных идеях.

Более сильная склонность математиков к подобным мечтам объясняется, по всей видимости, тем, что познание и постижение в математике очень тесно связаны с эстетикой. Сложное и непрозрачное доказательство часто свидетельствует о том, что мы что-то неправильно поняли. А получение нового результата часто приводит к тому, что все вдруг сходится, мы начинаем видеть взаимосвязи там, где раньше видимыми были только их отдельные фрагменты.

(Я думаю, что здесь можно провести параллель с современным искусством и современной музыкой. Первое знакомство с произведениями современного искусства необязательно вызывает восторг, скорее замешательство, а не энтузиазм. И только их внимательное изучение позволяет нам постепенно оценить значение и выразительность этих произведений.)

К.: Господин профессор Эйлер, Вы родились и выросли в Швейцарии. Это время наложило на Вас сильный отпечаток?

Э.: Риэн, где я родился, уже в то время был излюбленным местом жительства базельцев (Базель и муниципалитеты Беттинген и Риэн входят в небольшой немецкоязычный кантон на севере Швейцарии Базель-Штадт — *Прим. перев.*). Моя юность была беззаботной, родители предоставили мне большую свободу, школы также не предъявляли высоких требований. К счастью, в то время существовали очень интересные программы поддержки одаренных учеников, которые финансировались частными организаторами и фондами и реализовывались под руководством заинтересованных и активных учителей и профессоров.

Добрые воспоминания я сохранил о двух учителях: об учителе латыни, который своими живыми уроками сумел пробудить интерес у немногих слушателей к этому факультативному курсу, и об учительнице математики, которая постоянно снабжала меня увлекательными математическими текстами и давала наставления в их изучении. Она помогла мне перескочить через два класса, благодаря чему я окончил школу в семнадцать лет.

К.: Господин Эйлер, свое образование Вы продолжили в Цюрихе. Базель оказался малопривлекательным?

Э.: Картина университетского образования претерпела в те годы радикальные изменения, с одной стороны, под давлением постоянно растущего числа студентов — в 2020 году число студентов Базельского университета уже превысило магическую цифру 20 000, с другой стороны, по причине дефицита необходимых средств. При поддержке Конфедерации был основан «Университет Швейцарии» с двумя полноценными филиалами в Цюрихе и Лозанне, а также кампусами в Базеле, Берне, Женеве и Санкт-Галлене.

(В этих филиалах, благодаря упразднению некоторых отделений, администрацию удалось превратить в эффективный инструмент руководства, что позволило без проблем решать организационные вопросы, связанные с увеличением числа студентов, без расширения штата преподавателей.)

Кампус в Базеле специализировался на культурологи и биологии, но при этом преподавание большинства классических естественных наук было редуцировано там до уровня вводных курсов, что значительно снизило привлекательность этого учебного заведения, особенно в глазах тех, кто стремился получить достаточно широкое образование.

(Кроме того, мне не хотелось проводить большую часть учебы в поездах, хотя некоторые вагоны были переоборудованы в учебные помещения с полным набором электроники, так что студенты уже по дороге на занятия могли набирать необходимые кредитные баллы. Правда, смею предположить, что слово «мобильность» изначально понималось несколько иначе.)

К.: Какое впечатление на Вас произвел Цюрих?

Э.: Предлагаемый выбор курсов был очень широким и казался многообещающим. Но число студентов — более 100 000 — определило доминирующую роль организационной структуры. Это многообразие было искусственным, оно не могло учитывать индивидуальных потребностей учащихся. Учеба была четко регламентирована, так что не надо было терять время на размышления, с самого начала можно было сконцентрироваться на наборе необходимого числа кредитных баллов. От вступительных экзаменов университет отказался сознательно, чтобы всем молодым людям дать равные шансы и не культивировать нежелательную элиту.

Очевидная цель состояла в том, чтобы за минимально возможное время «пропустить» через университет максимально возможное число студентов. Необходимо было соответствующим образом адаптировать к этой цели требования и уровень обучения. Такой процесс уже был успешно завершен в подготовительных средних школах. Даже на лекциях по основным математическим курсам присутствовали несколько сотен студентов; об индивидуальном подходе и речи не могло быть.

К.: Господин Эйлер, но ведь, в конечном счете, эта концепция оказалась успешной?

Э.: Да, Вы правы. Большинству студентов она, по-видимому, вполне нравилась. Потому что они совершенно точно знали, что и к какому сроку должны выучить и когда будет проводиться проверка знаний по тому или иному учебному материалу. Все учебные курсы были стандартизированы в соответствии с едиными педагогическими принципами, в результате, индивидуальная роль преподавателей была сведена к минимуму. Но я хорошо помню, что некоторые из моих сотоварищей очень страдали от этого анонимного и обезличенного «серийного производства» и даже потерпели фиаско.

К счастью, по математике проводился ряд специальных семинаров, в рамках которых мы обсуждали и совместно прорабатывали увлекательные и актуальные темы. Эти семинары не были сертифицированы, потому что не были включены в общеуниверситетский процесс контроля качества. Вероятно, к счастью!

В то время постоянно говорили и много писали о качестве, о критериях качества, управлении качеством и обеспечении качества. Но при этом бросалось в глаза, что определяющие критерии были почти исключительно количественными: количество студентов, количество окончивших университет, количество сотрудников, количество публикаций, количество участников проектов, сторонних средств и т. д.

К.: Господин Эйлер, именно по этим причинам Вы уже в 20 лет уехали в США?

Э.: Как я уже упоминал, у меня не было больших проблем с этой системой образования. Благодаря хорошей подготовке мне было легко самостоятельно прорабатывать необходимые материалы, и уже в скором времени я соприкоснулся с актуальными исследованиями. Я познакомился с несколькими известными в мире ведущими математиками, которые нашли время для общения со мной, с ними я мог обсуждать различные проблемы.

Один из них пригласил меня в Принстон для участия в семинаре и предложил место аспиранта. Это предложение я принял без колебаний.

Мне всегда хотелось провести часть учебы в зарубежном университете, а Принстон, естественно, был очень привлекательным местом. Быстро сформировавшееся решение остаться там возникло просто на основе положительных ощущений и эмоций. Принстон намного меньше и обозримее Цюриха, и я чувствовал доброе и радушное отношение к себе. Преподаватели интересовались мной, находили для меня время и помогали найти собственный путь. Кроме того, они возложили на меня большую ответственность.

Это было чувство взаимного доверия и независимости; я был уверен, что обо мне судят честно и только на основе моих достижений, независимо от случайных внешних обстоятельств, а также независимо от выбранного мною пути.

К.: Господин Эйлер, Вы достаточно хорошо знаете ситуацию с высшим образованием в Швейцарии. Вы и сейчас порекомендовали бы молодым ученым отправляться за границу, чтобы сделать карьеру?

Э.: В середине XXI века ситуация в сфере науки и образования принципиально изменилась. Я позволю себе усомниться в том, что решающую роль в этом деле сыграл «Университет Швейцарии». Скорее я склонен полагать, что в обществе произошло радикальное переосмысление, вызванное необычайно большим числом природных катастроф и эпидемий, ощутимым дефицитом природных ресурсов, заметным ухудшением качества жизни из-за проблем с экологией и энергоснабжением.

Произошел переход от количественного роста к качественному, от краткосрочных и быстрых решений проблем к их долгосрочному анализу, от схем к индивидууму, от групп к каждому, от поддержки всех к поощрению таланта.

Пристальное внимание к качеству породило критический анализ собственных действий и возврат к главному. Многие осознали, что образование является важным делом, ради которого стоит прилагать большие усилия, а также то, что хорошее образование и постоянное повышение квалификации обязательны для построения нашего будущего.

Благодаря введению обязательных вступительных экзаменов в вузы не только невероятно возросло качество обучения. Намного улучшилась также успеваемость и отношение к учебе в средних школах. А многочисленные хорошо подготовленные иностранные студенты дополнительно усилили этот эффект.

К.: Как обстоят дела с молодыми специалистами?

Э.: Поскольку качество получило однозначное признание, люди, облеченные ответственностью, осознали важную роль поддержки талантливой молодежи, необходимость усиленной заботы о подрастающем поколении, а также то обстоятельство, что привлекательность Швейцарии как центра научных исследований стоит в прямой зависимости от качества и спектра предложений.

Многие поняли также, что национальные научные программы и приоритеты только в небольшой степени приносили желаемые плоды; они были слишком дорогостоящими, слишком тяжеловесными, перегруженными административными затратами, мало ориентировались на критерии качества и предпочитали инновациям старое.

От новой ориентации выиграли все образовательные и научные учреждения, в частности, фундаментальные исследования в университетах. Так, например, в Базельском университете, специализирующемся на естественных науках, пришли к пониманию того, что недостаточно ограничиваться преподаванием основ фундаментальных дисциплин, что для удержания позиций в условиях бурного развития естествознания также необходимы передовые теоретические исследования. С точки зрения наличия хорошо подготовленных молодых специалистов Швейцария принадлежит сегодня к числу самых привлекательных стран для проведения научных исследований.

К.: Несмотря на полученные приглашения Вы не вернулись в Швейцарию. Почему?

Э.: Условия моей работы в IAS просто великолепны, так же как мои отношения и совместная работа с коллегами. (В качестве приглашенного профессора IHES (Institut des Hautes Etudes Scientifiques — *Прим. перев.*) я два — три месяца в году работаю в Париже, что также приносит мне большую пользу.)

Ничего подобного мне в Швейцарии не предлагали; в то время у меня сложилось впечатление, что сотрудник с особым статусом здесь на самом деле не очень желателен.

Помимо этого были еще и «культурные» различия. Когда 20 лет назад я получил приглашение в Гарвард, то президент Гарвардского университета сам позвонил мне по телефону и пригласил к себе домой. Я провел с ним незабываемый вечер; я долго размышлял, принимать ли приглашение в университет. Несколько лет спустя, когда речь зашла о работе в Швейцарии, мне тоже позвонили. Звонила секретарша декана, чтобы узнать номер моего страхового полиса!

К.: Господин Эйлер, в заключение я хотел бы вернуться к Вашему открывающему новую эру в науке достижению, доказательству гипотезы Римана. Не могли бы Вы немного пояснить его для нас, непосвященных?

Э.: Теперь Вы ставите меня в затруднительное положение. Я четко сознаю, что мы, ученые, должны рассказывать общественности о своей деятельности, это — одна из наших задач. И это общение должно происходить на понятном языке. Мы не можем исходить из того, что нам верят и доверяют только потому, что мы носим звание профессоров, пользуемся известностью и являемся лауреатами премий. Для нас, математиков, эта задача является особым вызовом, ведь мы живем во времена, отличающиеся глубокой математической безграмотностью, во времена, когда многие даже образованные люди гордятся тем, что ничего не понимают в математике.

Поэтому я отвечу Вам выдуманным диалогом, который я позаимствовал из книги Иана Стюарта. Это разговор математика с воображаемым дилетантом:

М. (математик): Этот закон является одним из важнейших открытий последних десятилетий.

Д. (дилетант): Вы можете объяснить мне его словами, понятными простым смертным?

М.: Это невозможно. Вы не сможете получить верного впечатления, если не поймете технических деталей. Как мне рассказывать о топологических многообразиях, не упоминая, что законы, о которых идет речь, работают только в том случае, если эти многообразия хаусдорфовы, паракомпактны, имеют счетную базу.

Д.: В таком случае приврите немного.

М.: Нет, это предложение мне не по душе.

Д.: Почему нет? Все остальные тоже лгут.

М.: (близок к тому, чтобы поддаться искушению, но не может побороть многолетнюю привычку): Но я должен придерживаться истины!

Д.: Конечно. Но Вы можете немножко исказить ее, если это сделает более понятным то, чем Вы занимаетесь.

М: (скептически, но окрыленный собственной смелостью): Будь по-Вашему. Пусть это будет экспериментом.

По поводу этого диалога Ханс Магнус Энценсбергер заметил: «Это — попытка ликвидации неграмотности — длительный, но многообещающий проект, который должен был бы начинаться в раннем детском возрасте; он мог бы послужить нашим чересчур инертным мозгам своего рода тренировкой и доставить доселе абсолютно неизведанное удовольствие.

К.: Господин Эйлер, от всей души благодарю Вас за эту беседу.

Перевод с немецкого языка И. Ю. Тарасовой

Принятые сокращения

ВИЕТ — Вопросы истории естествознания и техники

ИМИ — Историко-математические исследования

AE — Acta Eruditorum

Acta — Acta Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae

Comm. — Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae

E — в сочетании с порядковым номером означает номер работы Л. Эйлера в списке его сочинений, составленном Г. Энестрёмом.

HASBL Berlin — Histoire de l’Academie Royale des sciences et des belles-lettres de Berlin

LEOO — Leonhardi Euleri Opera Omnia. В сочетании с числами означает следующее: римскими цифрами — номер серии, арабскими — номер тома, в скобках — номер части, через наклонную черту — номер секции.

MAA — Mathematical Association of America

MAS Berlin — Mémoires de l’Académie Royal des sciences et des belles-lettres de Berlin

MAS Paris — Mémoires de l’Académie Royale des sciences de Paris

MAS SPb — Mémoires de l’Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg

N. Comm. — Novi Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae

N. Acta — Nova Acta Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae

OP — Opera Postuma mathematica et physica.

SPb — St. Pétérsbourg

Сведения об авторах

Алдошин Геннадий Тихонович, проф., д.т.н., зав. каф. теоретической механики и баллистики Балтийского гос. технического университета, Санкт-Петербург

Богданов Владимир Иванович, в.н.с., к.ф.м.н., Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург

Боргато Мария Тереза, проф., факультет математики, Феррарский университет, Италия

Брылевская Лариса Ивановна, доц., к.ф.м.н., Санкт-Петербургский гос. университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург

Бусев Василий Михайлович, Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН, Москва

Васильев Владимир Николаевич, проф., чл.-кор. РАО, ректор Санкт-Петербургского гос. университета информационных технологий, механики и оптики, вице-президент Союза ректоров России, председатель Совета ректоров Санкт-Петербурга

Демидов Сергей Сергеевич, проф., д.ф.м.н., зав. отделом истории математики Института истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН, Москва

Добровольская Элла Михайловна, доц., к.ф.м.н., Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Киев, Украина

Захаров Андрей Сергеевич, доц., к.т.н., Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург

Илич Мириана, Центр Александра Койре, Париж, Франция

Кац Евгений Адольфович, к.ф.м.н., отдел солнечной энергии и физики окружающей среды, Институт исследования пустыни, университет им. Бен-Гуриона, Израиль

Кизилова Наталья Николаевна, проф., зав. каф. теоретической механики Харьковского национального университета, Харьков, Украина

Кляйнерт Андреас, д-р, Эйлеровская комиссия, Халле, Германия

Колесников Юрий Леонидович, проф., д.ф.м.н., проректор Санкт-Петербургского гос. университета информационных технологий, механики и оптики

Крафт Ханспетер, проф., Институт математики Базельского университета, президент Эйлеровской комиссии, Швейцария

Кузичева Зинаида Андреевна, с.н.с., к.ф.м.н., механико-математический факультет, Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Малова Татьяна Игоревна, н.с., Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург

Мальцева Надежда Константиновна, доц., к.т.н., директор НОЦ «Музей истории СПбГУ ИТМО», Санкт-Петербургский гос. университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург

Малых Алла Ефимовна, проф., д.ф.м.н., зав. каф. геометрии Пермского гос. педагогического университета, Пермь

Матвиевская Галина Павловна, проф., д.ф.м.н., чл.-кор. Уз.АН, Оренбургский гос. педагогический университет, Оренбург

Маттмюллер Мартин, Архив Эйлера в Базеле, Эйлеровская комиссия, Базель, Швейцария

Михайлов Глеб Константинович, проф., д.ф.м.н., Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике, Москва

Морозов Никита Федорович, акад. РАН, зав. каф. теории упругости Санкт-Петербургского гос. университета, председатель Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела, зам. председателя Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, Санкт-Петербург

Нагель Фриц, д-р, руководитель Базельского исследовательского объединения Издательства Бернулли, Базель, Швейцария

Николаева Валентина Владимировна, н.с., ЗАО «Леноблреставрация», Санкт-Петербург

Окрепилов Владимир Валентинович, д.э.н., чл.-корр. РАН, член Президиума РАН, заместитель председателя Президиума СПб НЦ РАН, генеральный директор ФГУ «ТЕСТ-С.-Петербург», Санкт-Петербург

Петрович Александар, д-р, университет в Крагуеваце, Сербия

Пир Жан-Поль, проф., Люксембургский университетский центр, Люксембург

Полякова Татьяна Сергеевна, проф., д.пед.н., зав. кафедрой геометрии и методики преподавания математики Ростовского гос. педагогического университета, Ростов-на-Дону, Россия.

Сезиано Жак, Лозаннская федеральная политехническая школа, Лозанна, Швейцария

Товстик Петр Евгеньевич, проф., д.ф.м.н., зав. каф. теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского гос. университета, Санкт-Петербург

Толчельникова Светлана Александровна, с.н.с., к.ф.м.н., Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург

Тюлина Ирина Александровна, доц., к.ф.м.н., механико-математический факультет, Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Холшевников Константин Владиславович, проф., д.ф.м.н., зав. кафедрой небесной механики Санкт-Петербургского гос. университета, Санкт-Петербург

Шеламова Татьяна Владимировна, Санкт-Петербургский гос. университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург

Юркина Мария Ивановна, с.н.с., к.ф.м.н., Центральный научно-исследовательский институт геодезии, аэросъемки и картографии им. Ф. Н. Красовского, Москва

Aldoshin Gennady T. Prof., Head of the Department of Theoretical Mechanics and Ballistics, Baltic State Technical University, St. Petersburg, Russia

Bogdanov Vladimir I. Dr. the Central Astronomical Observatory at Pulkovo of the Russian Academy of Sciences (RAS), St. Petersburg, Russia

Borgato Maria Teresa. Prof., Department of Mathematics, University of Ferrara, Italy

Brylevskaya Larisa I. Leading Researcher, Dr., Department of Mathematics, St. Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics, St. Petersburg, Russia

Busev Vasilji M. S. I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology of the RAS, Moscow, Russia

Demidov Sergey S. Prof., Head of the Department of History of Mathematics, S. I. Vavilov Institute for the History of Science and Technology of the RAS, Moscow, Russia

Dobrovolskaya Ella M. Dr., National Technical University of Ukraine, Kiev, Ukraine

Ilic Mirjan. Alexandre Koyré Center, Paris, France

Katz Evgeny. Dr., Department of Solar Energy and Environmental Physics, Jacob Blaustein Institutes for Desert Research, Ben-Gurion University of the Negev, Israel

Kholshevnikov Konstantin V. Prof., Head of Celestial Mechanics Chair, St. Petersburg State University, St. Petersburg

Kizilova Natalia N. Prof., Head of the Department of Theoretical Mechanics, Harkov National University, Harkov, Ukraine

Kleinert Andreas. Dr., Euler Commission, Halle, Germany

Kolesnikov Yurji L. Prof., Vice-rector, St. Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics, St. Petersburg, Russia

Kraft Hanspeter. Prof., Dr. Institute of Mathematics of the Basel University, president of the Euler Commission, Basel, Switzerland

Kuzicheva Zinaida A. Senior Researcher, Dr., Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Moscow, Russia

Malova Tatjana I. Researcher, the Central Astronomical Observatory at Pulkovo of the RAS, St. Petersburg, Russia

Maltseva Nadezhda K. Dr., Director of the Museum of St. Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics, St. Petersburg, Russia

Malykh Alla E. Prof., Head of the Department of Geometry, Perm State Pedagogical University, Perm, Russia

Matvievskaya Galina P. Prof., Corresp. Member of Uzbek AS, Orenburg State Pedagogical University, Orenburg, Russia

Mattmüller Martin. Euler Archive Basel, Euler Commission, Basel, Switzerland

Mikhailov Gleb K. Prof., Russian National Committee for Theoretical and Applied Mechanics, Moscow, Russia

Morozov Nikita F. Acad. RAS, Head of the Department of Theory of Elasticity of St. Petersburg State University, President of the RAS Scientific Union for Solid Deformable Mechanics, Vice-President of the Russian National Committee for Theoretical and Applied Mechanics, St. Petersburg, Russia

Nagel Friz. Dr., Head of the Basel research unit of the Bernoulli-Edition, Euler Commission, Basel, Switzerland

Nikolaeva Valentina V. Researcher, “Lenoblrestavratsija”, St. Petersburg, Russia

Okrepilov Vladimir V. Corresp. Member of RAS, Presidium Member of RAS, Vice-Chairman of Saint-Petersburg Scientific Center, General Director of the Federal Service “Test-St. Petersburg”, St. Petersburg, Russia

Petrovic Aleksandar. Dr., University of Kragujevac, Republic of Serbia.

Pier Jean-Paul. Prof., Luxembourg University Center, Luxembourg

Polyakova Tatiana S. Prof., Head of the Department of Geometry and Methods of the Teaching of Mathematics, Rostov-on-Don State University, Rostov-on-Don, Russia

Shelamova Tatiana V. St. Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics, St. Petersburg, Russia

Sesiano Jacques. Ecole polytéchnique fédérale de Lausanne, Switzerland

Tovstik Petr E. Prof., Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

Tolchelnikova Svetlana A. Senior Researcher, Dr., the Central Astronomical Observatory at Pulkovo of the RAS, St. Petersburg, Russia

Tjulina Irina A. Dr., Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Moscow, Russia

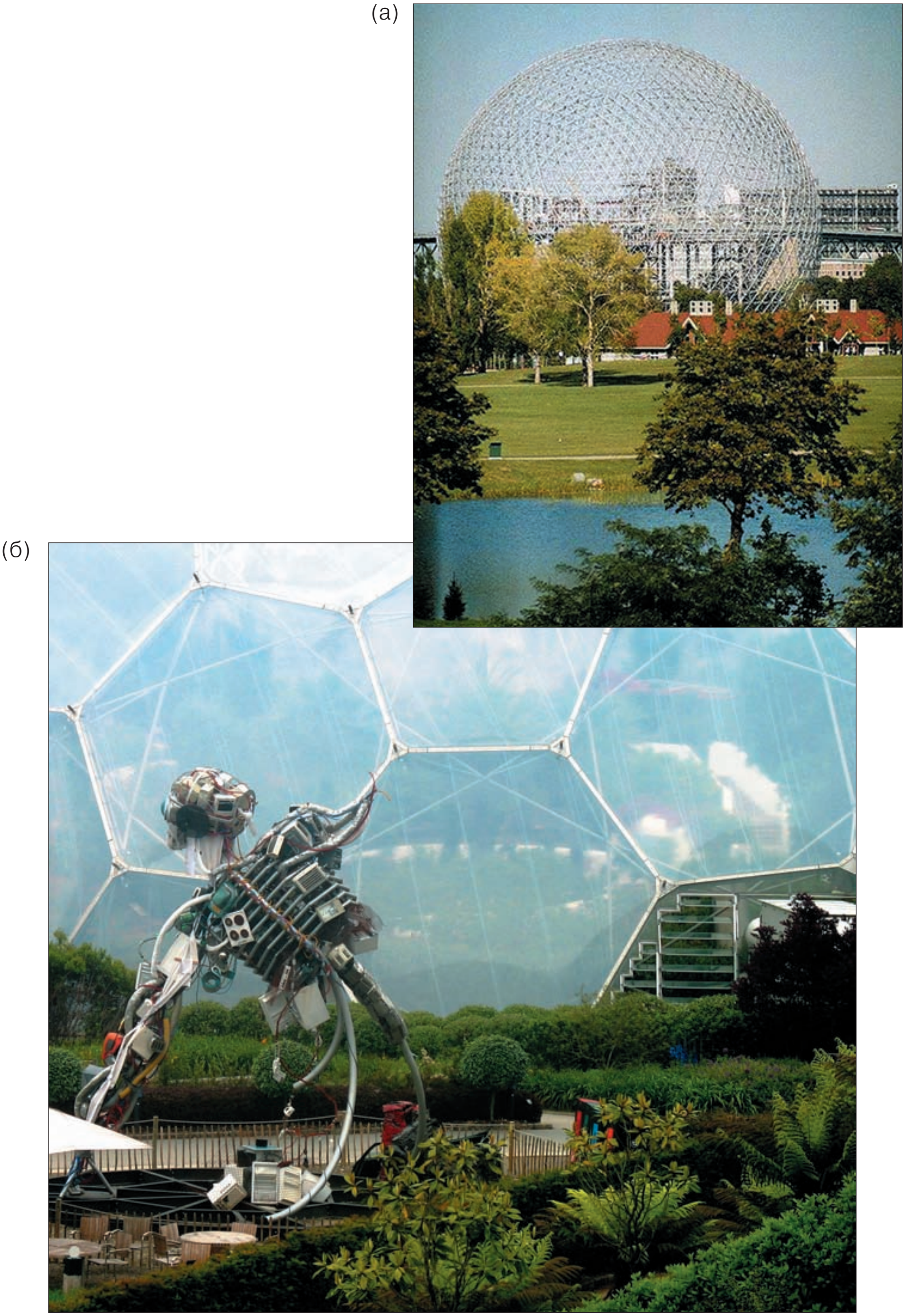
Vasilyev Vladimir N. Prof., President of St. Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Vice-President of the Rectors Union of Russia, President of the Rectors Council of St. Petersburg, Russia

Yurkina Marja I. Senior Researcher, Dr., the Central Institute for Geodesy, Aerial photography and Cartography, Moscow, Russia

Zakharov Andrey S. Dr., St. Petersburg State Marine Technical University, St. Petersburg, Russia

Дом на набережной Невы, где с 1766 по 1783 год жил Леонард Эйлер

Мемориальная доска на доме Л. Эйлера



Геодезические купола.
(а) Павильон США на всемирной выставке ЭКСПО-67 в Монреале, архитектор Бакминстер Фуллер. (б) Ботанический сад в Сент-Остелле (Англия)

Российский герб Эйлеров

Бюст Л.Эйлера, установленный в 2007 году у Международного математического института Эйлера (скульпторы А.Г. Дёма и В.Ф.Онешко)

Участники юбилейных торжеств (Виноградова Т.К., Михайлов Г.К.) у могилы Л. Эйлера в Александро-Невской Лавре

Научное издание

Леонард Эйлер:
К 300-летию со дня рождения

Сборник статей
Отв. редактор *В. Н. Васильев*

Редактор *В. С. Рыжков*
Компьютерная верстка *Л. А. Философова*

Подписано в печать 18.12.2008. Формат 70×100 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл.-печ. л. 21. Заказ №

Издательство «Нестор-История»
197110 СПб., Петрозаводская ул., д. 7
тел.: (812)235-15-86
e-mail: nestor_historia@list.ru

Отпечатано в типографии «Нестор-История»
СПб., ул. Розенштейна, д. 21
Тел.: (812)622-01-23